

## 6 Geometrische Berechnungen in einem GIS

In der Vorlesung GIS kann hier nur ein Eindruck von den Problemen und den Lösungsverfahren gegeben werden. Obwohl das Skript in seiner Darstellung über die Vorlesung hinausgeht, kann es die Probleme nur anreißen.<sup>41</sup>

### 6.1 Computergeometrie

In der Computergeometrie werden Methoden und Ergebnisse verschiedener Teilgebiete der Geometrie, wie der konstruktiven, der analytischen, der Differentialgeometrie, aber auch der Topologie u.a. unter Einbeziehung der Informatik algorithmisch beschrieben, auf die Bearbeitung geometrischer Aspekte natur- und ingenieurwissenschaftlicher Aufgaben ausgerichtet und für die Anwender bereitgestellt.

Aufgabenkomplexe der Computergeometrie:

- Entwicklung von mathematisch formulierbaren Geometriemodellen und Abbildung realer Objekte in geometrisch abstrakte Objekte und deren Beschreibung in Form einer Menge von Parametern, Relationen und Operationen, so dass sowohl metrische als auch topologische Eigenschaften eindeutig beschrieben werden.
- Entwicklung von Entwurfsverfahren für spezielle Kurven, Flächen und Körper, die als Basis für Hard- und Softwarelösungen ingenieurwissenschaftlicher und technischer Aufgabenstellungen dienen.
- Untersuchungen zu theoretischen Grundlagen und zur Entwicklung von rechen-technisch effizienten Algorithmen und Methoden für die computergerechte Umsetzung von Geometriemodellen und Verfahren.

Die deutsche Namensgebung *Computergeometrie* für diese mathematische Disziplin ist also nicht treffend, die Übersetzung des englischen *computational geometry* (= rechnerische Geometrie) ist treffend, aber völlig unüblich.

In Rahmen ingenieurtechnischer Aufgaben (CAD) spielen neben einem oder mehreren Geometriemodellen mit den oben genannten Aufgaben auch Aussagen beispielsweise über Werkstoffe, Technologien, Güteigenschaften usw. eine Rolle. Im Bereich der Geoinformationssysteme liefert die Computergeometrie die Algorithmen, die für die Bearbeitung aller geometrischen Fragestellungen benötigt werden, sei es die Durchführung von Konstruktionen neuer Objekte als auch die Ausführung geometriebezogener Datenbankabfragen bzw. Auswertungen. In diesem Sinn sind die Geoinformationssysteme ein Anwendungsgebiet der Computergeometrie<sup>42</sup>.

---

<sup>41</sup>Dieses Kapitel wurde bearbeitet von Marco Apitz

<sup>42</sup>Weitere sind die Computergrafik, deren Aufgabe u.a. die Generierung von Bildern aus der rechnerinternen Darstellung der modellierten Objekte ist, die bestimmten Konventionen genügen (z.B. technische Zeichnungen) bzw. realistisch im Sinne des Fotorealismus wirken oder Systeme zum rechnerunterstützten Konstruieren oder zur numerischen Steuerung von Maschinen zur spanabhebenden Verformung.

## 6.2 Geometriemodelle

### 6.2.1 Der Modellbegriff

Mit dem Begriff *Modell* wird folgender Sachverhalt verbunden: Anstelle eines Objekts der Realität oder einer Abstraktion davon wird ein anderes Objekt analysiert (im weitesten Sinn des Wortes) und aus den Resultaten der Analyse auf das Verhalten des Ausgangsobjekts geschlossen.

Ein Modell in der Computergeometrie dient zur Beschreibung geometrischer Objekte und Operationen. Für verschiedene Zwecke werden unterschiedliche geometrische Elemente (z.B. Beschreibung der Oberflächengestalt, Aussagen über Normalen, Tangenten, Inzidenzbeziehungen) benötigt, so dass sich unterschiedliche Modelle ergeben. Ein *Geometriemodell* besteht nach Requicha<sup>43</sup> aus drei Komponenten:

- einer Menge  $K$  von Objekten im realen Raum, die gewissen realen Bearbeitungen unterworfen werden
- einer Gesamtheit  $M$  von Punktmengen im euklidischen Raum  $\mathbb{R}^n, n=2,3$
- einer Menge  $R$  von Repräsentationen (Zeichenketten) und Algorithmen zu deren Verarbeitung in einem Rechner

Zwischen den Komponenten existieren zwei Abbildungen  $m$  und  $r$ :

$m: K \mapsto M$  ;  $r: M \mapsto R$ .

$m$  heißt *Modellschema*,  $r$  *Repräsentationsschema*.

Auf den Mengen der Objekte ist jeweils eine Gesamtheit  $O$  von Operationen erklärt.

Auf  $K$ :  $O_K$ , dies sind beispielsweise technische Bearbeitungsverfahren wie das Teilen eines Grundstücks oder das Aufschütten eines Damms als Deich entlang eines Flusses

Auf  $M$ :  $O_M$ , von den Mengenoperationen abgeleitete Operationen sowie mathematische Konstruktionen und Berechnungen

Auf  $R$ :  $O_R$ , Vorschriften zur Arbeit mit den Repräsentationen, die im Beispiel der Grundstücksteilung aus einem Objekt vom Typ „Grundstück“ zwei Objekte erzeugen, die eine Grenzlinie gemeinsam haben.

$M$ ,  $R$ ,  $O_M$ ,  $O_R$  und  $r$  bilden den Gegenstand der Computergeometrie.

Sind  $(M, O_M)$  und  $R$  festgelegt, dann bestimmt  $r$  welche Objekte  $R$  und welche Algorithmen  $O_R$  enthalten muss, damit folgende Bedingungen erfüllt werden:

- im Modell kann eine für den Anwendungsfall ausreichende Klasse von geometrischen Objekten beschrieben werden,
- im Modell werden die Operationen (Verknüpfung) mit und Transformation von Objekten so definiert, dass sie nicht aus der Klasse herausführen (*Konsistenz*),
- die Repräsentation der Objekte und Operationen erfolgt durch Daten und Algorithmen in einer Form, die durch endliche Zeichenketten über einem endlichen Alphabet beschrieben werden kann (als Voraussetzung für eine rechentechnische Realisierung) (*algorithmische Brauchbarkeit* eines Modells).

Diese zweistufige Modellierungsprozess ist typisch für viele Bereiche der Informatik. Die Abbildung der Welt erfolgt in einem ersten Schritt in ein Modell, das einer anderen Wissenschaft (hier der Mathematik) entlehnt wird. Dieses Modell wird dann im zweiten Schritt auf eine rechnerinterne Darstellung abgebildet, d.h. in letzter Konsequenz auf Bitfolgen

<sup>43</sup>Literatur: LNCS89

und Algorithmen zur Umformung dieser Bitfolgen.

Von Interesse sind dabei eindeutige Abbildungen, d.h. Isomorphismen. Die Modelle selbst sind im mathematischen Sinn eine Algebra (Definition des Begriffes Algebra  $\mapsto$  Vorlesung Mathematik).

Eine Hauptanforderung hinsichtlich der Implementation eines Modells auf einem Rechner ist die algorithmische Brauchbarkeit des Modells: Die Operationen werden durch Algorithmen beschrieben. Es ist offensichtlich, dass beispielsweise die Aufzählung aller Punkte einer Strecke nicht möglich ist, wohl aber die Angabe der Endpunkte und von Vorschriften, die nötigenfalls die Berechnung weiterer Punkte erlauben bzw. zu entscheiden gestatten, ob ein gegebener Punkt zur Strecke gehört.

In vielen Modellen erfolgt die Darstellung eines Punktes mit seinem Ortsvektor, also als Zahlentripel. Die Darstellung eines Objekts beruht auf Listen und anderen Datenstrukturen, in denen das Objekt charakterisierende Punkte eingetragen werden, sowie auf Ausdrücken und Berechnungsvorschriften.

Teilgebiete der Computergeometrie beschäftigen sich mit daraus resultierenden Fragen: Welche Datenstrukturen sind den Aufgaben angepasst, so daß beispielsweise der Zugriff auf die Daten zeitoptimal erfolgt oder welche Algorithmen sind die bestmöglichen, wo liegen theoretische Grenzen u.a.m.

### 6.2.2 Modelltypen

Ein Kriterium zur Einteilung der Modelle bilden die für sie charakteristischen geometrischen Elementarobjekte.

**Linienorientierte Modelle:** Hier werden Objekte lediglich durch Punkte und Linien (ähnlich einem Drahtgitter) repräsentiert. Dies können bei zweidimensionalen Objekten Umrisslinien, bei dreidimensionalen Objekten z.B. Kanten oder Scharen von Parameterlinien sein. Systeme mit solchen Modellen existieren in zwei- oder dreidimensionaler Ausführung. Sie weisen eine einfache Struktur auf, haben aber insbesondere bei dreidimensionalen Anwendungen gravierende Nachteile, was sie für komplexe Aufgaben ausschließt: die Darstellung ist nicht eindeutig, grafische Darstellungen sind oft unübersichtlich, weil nur die Linien dargestellt werden. Ohne Informationen über Flächen können Verdeckungen nicht beachtet werden. Weiterhin ist eine Prüfung auf Konsistenz nicht möglich. Anwendung fanden Linienmodelle bisher vornehmlich bei Systemen zur Erstellung technischer Zeichnungen, aber auch hier werden sie wegen ihrer Nachteile abgelöst.

In der Literatur<sup>44</sup> werden Beispiele gegeben, die Schwachstellen der Linienmodelle im dreidimensionalen Raum demonstrieren.

---

<sup>44</sup>siehe z.B. 'Lecture Notes in Computerscience 89', Springer-Verlag Berlin, 1989

*Beispiel:* Darstellung eines Quaders mit den Kantenlängen  $6 \times 4 \times 2$  Einheiten<sup>3</sup>, achsenparallel im Ursprung liegend mittels Punkte- und Kantenliste

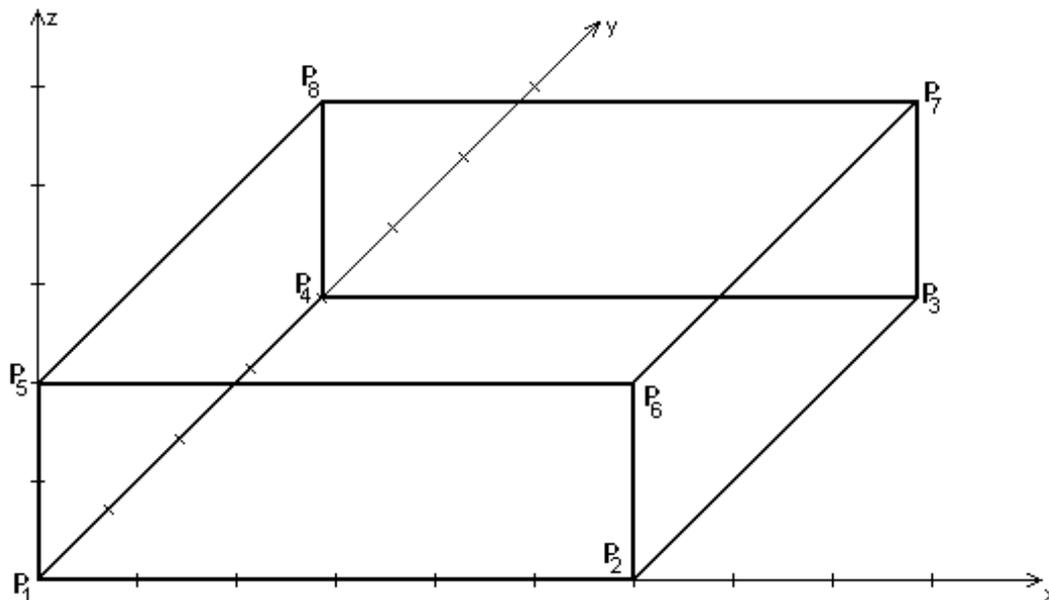


Abbildung 27: Quader im Drahtmodell

Punktliste:

$$P_1=(0,0,0) \quad P_2=(6,0,0) \quad P_3=(6,4,0) \quad P_4=(0,4,0)$$

$$P_5=(0,0,2) \quad P_6=(6,0,2) \quad P_7=(6,4,2) \quad P_8=(0,4,2)$$

Kantenliste:

$$K_1 = P_1P_2, \quad K_2 = P_2P_3, \quad K_3 = P_3P_4, \quad K_4 = P_4P_1, \quad K_5 = P_1P_5,$$

$$K_6 = P_2P_6, \quad K_7 = P_3P_7, \quad K_8 = P_4P_8, \quad K_9 = P_5P_6, \quad K_{10} = P_6P_7,$$

$$K_{11} = P_7P_8, \quad K_{12} = P_8P_5$$

Anstelle der Kantenliste ist auch die Angabe einer *Adjazenzmatrix* ( Verbindungsmatrix ) möglich:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & & & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

In diese quadratische Matrix mit so vielen Reihen, wie Punkte vorhanden sind, wird als Matrixelement eine Eins eingetragen, wenn die durch Zeilen- und Spaltennummer beschriebenen, voneinander verschiedenen Punkte durch eine Kante verbunden sind, andernfalls eine Null. Aus Symmetriegründen müssen nur die Elemente oberhalb der Hauptdiagonalen angegeben sein.

In GIS findet diese Adjazenzmatrix, die Graphen beschreibt, als Grundstruktur für Netzinformationssysteme Verwendung. Das Matrixelement an der Position  $(i, j)$  trägt dort alle Informationen über die Verbindung zwischen Netzknoten  $i$  und Netzknoten  $j$ .

**Flächenorientierte Modelle:** Flächen bilden jetzt die Grundelemente bei der Beschreibung der Objekte. Dadurch sind Flächen im Raum, auch Oberflächen von Körpern, beschreibbar. Die folgende Abbildung zeigt die den Quader begrenzenden Flächenstücke, deren Vereinigung die Körperoberfläche bildet.

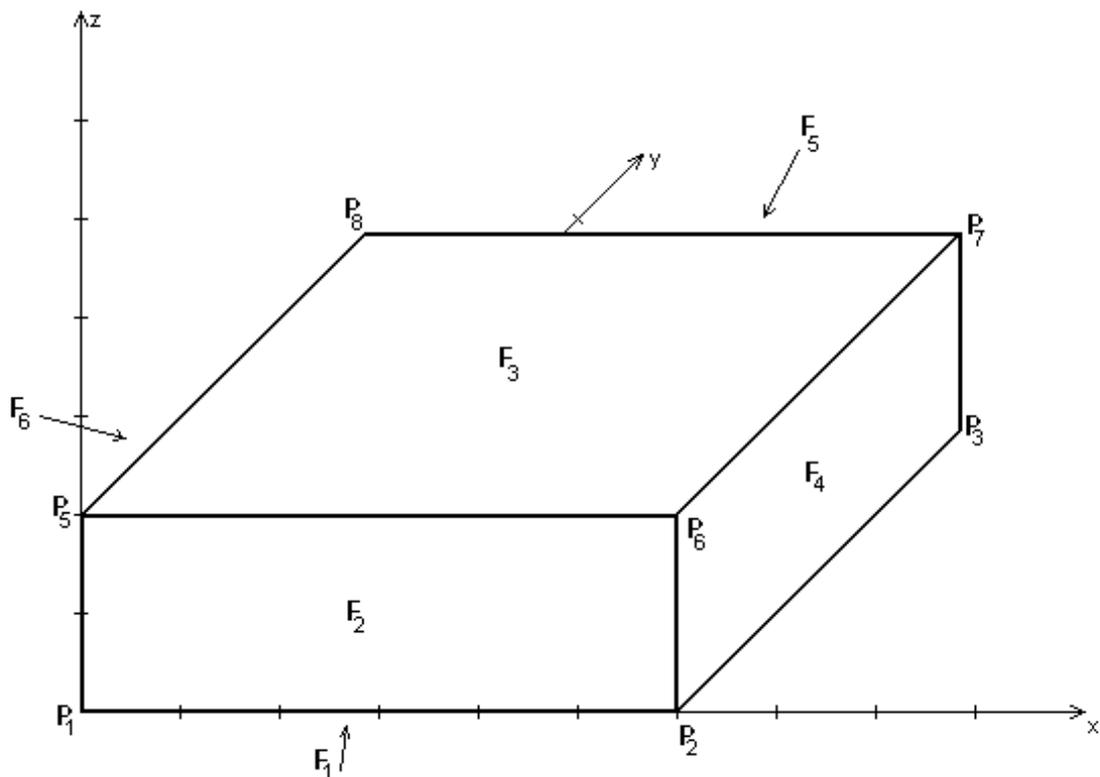


Abbildung 28: Den Quader begrenzende Flächenstücke

*Beispiel:* Darstellung des obigen Quaders mit Flächenliste (Punkte- und Kantenliste haben sich gegenüber dem vorigen Beispiel nicht verändert).

Flächenliste:

$$\begin{aligned} F_1 &= (P_1, P_2, P_3, P_4) & F_2 &= (P_1, P_2, P_6, P_5) & F_3 &= (P_5, P_6, P_7, P_8) \\ F_4 &= (P_2, P_3, P_7, P_6) & F_5 &= (P_4, P_3, P_7, P_8) & F_6 &= (P_1, P_4, P_8, P_5) \end{aligned}$$

**Körperorientierte Modelle:** *Volumenmodelle* beschreiben die Objekte in ihrer Gesamtheit. Sie müssen sowohl das Innere als auch den Rand der Objekte bestimmen. Eine Grundlage dieser Modelle bilden so genannte

*Grundkörper* oder *Primitive*. Diese Grundkörper stellen die Elementarbausteine dar, aus denen der Nutzer durch die im Modell zur Verfügung stehenden Operationen seinen Körper konstruiert. Dazu werden die Körper als Punktmengen in einem dreidimensionalen euklidischen Raum aufgefasst, weshalb die Operationen mit den Bewegungen und den Mengenoperationen in Zusammenhang stehen. Die Operationen verändern sowohl die topologischen als auch die metrischen Eigenschaften. Durch geeignete Definition der Operationen (regularisierte/modifizierte Mengenoperationen, closed-int-Algebra s.S.78) wird gewährleistet, dass die Bearbeitung oder Verknüpfung konsistenter Körper zu einem konsistenten Ergebniskörper führt.

*Beispiel:* Beschreibung des obigen Quaders in einem konstruktiven Körpermodell. Die Beschreibung geht von den Ebenen aus, in die die Seitenflächen eingebettet sind. Diese teilen den  $\mathbb{R}^3$  jeweils in zwei Halbräume, von denen einer dadurch ausgezeichnet wird, dass der Quader in seinem Abschluss liegt:

$$\begin{aligned} \text{HR}_1 : x &\geq 0 & \text{HR}_2 : -x + 6 &\geq 0 \\ \text{HR}_3 : y &\geq 0 & \text{HR}_4 : -y + 4 &\geq 0 \\ \text{HR}_5 : z &\geq 0 & \text{HR}_6 : -z + 2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Die Halbräume bilden die Grundkörper. Der Quader ergibt sich nun als mengentheoretischer Durchschnitt dieser 6 Halbräume:  $Q = \bigcap_{i=1}^6 \text{HR}_i$  (Polyederalgebra s.S.79)

Die Vorschrift zur Konstruktion eines Körpers lässt sich auch durch einen CSG-Baum<sup>45</sup> beschreiben, bei dem die Blätter durch Primitive mit Bewegungstransformationen und die Knoten durch Operationen belegt sind. Die Bewegungstransformationen  $T_i$  bringen die Grundkörper an ihren Platz im Gesamtobjekt.

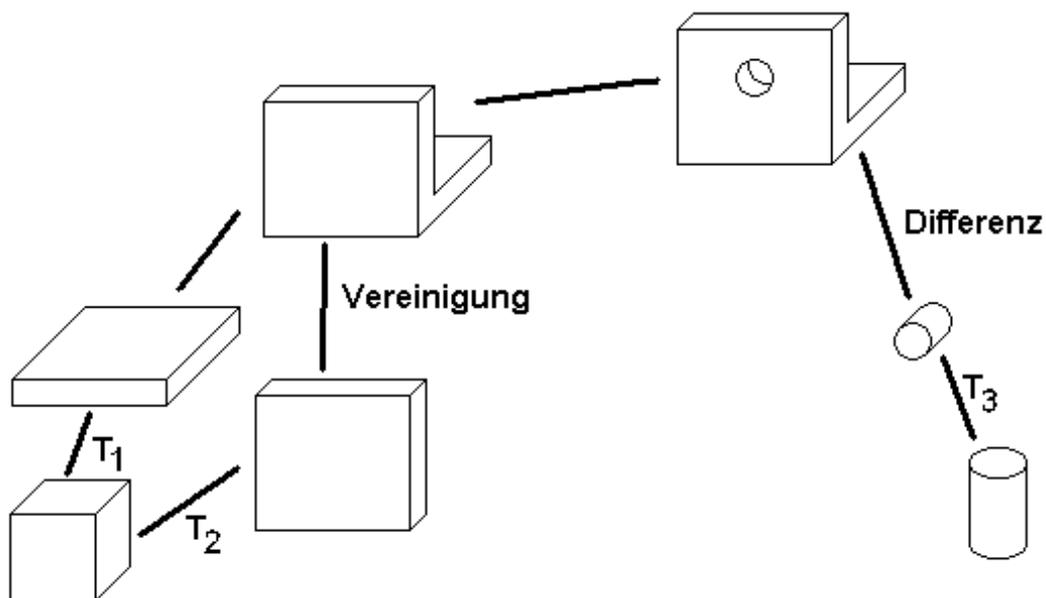


Abbildung 29: Körperorientierte Darstellung: Winkel mit Loch und CSG-Baum

Bei den *Randmodellen* werden die Objekte durch ihren Rand charakterisiert: Volumenelemente durch begrenzende Flächenstücke, Flächenelemente durch begrenzende Kurvenstücke und diese durch begrenzende Punkte. Dies ergibt insgesamt eine mehrstufige Struktur. Durch zusätzliche Informationen (z.B. Festlegung einer Orientierung auf dem Rand oder einer äußeren Normalen) sind Inneres und Äußeres vieler Objekte bei Randdarstellung bestimmt (Vgl. Vorlesung Prof. E.Rahm: 'DBS II', siehe 'Beschränkungen des Relationenmodells').

<sup>45</sup>csg: Abk. a.d.engl. für *constructive solid geometry* = konstruktive Geometrie der Körper

**Sweeping - Modelle:** Vorgegeben werden Generator und Direktor. Der *Generator* besteht aus einer Kontur oder einer Fläche  $F$  im Raum, auf der ein Punkt  $Q$  fixiert ist. In  $Q$  werden die orthogonalen Stellungsvektoren  $\vec{r}$ ,  $\vec{s}$  und  $\vec{t}$  angetragen. Der *Direktor* ist eine Bahnkurve  $C$ , wobei in jedem Kurvenpunkt die ebenfalls orthogonalen Richtungsvektoren  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  gegeben sind. Das gesuchte Objekt ist die Gesamtheit aller Punkte im Raum, die die Kontur oder Fläche überstreicht, wenn die Bewegung entlang der Bahnkurve so ausgeführt wird, dass  $P$  auf der Kurve unter Beachtung von  $\vec{r} \parallel \vec{u}$ ,  $\vec{s} \parallel \vec{v}$  und  $\vec{t} \parallel \vec{w}$  geführt wird. Die Ergebnisse werden Schiebe- oder (a. d. Engl.) sweeping - Flächen oder Körper genannt.

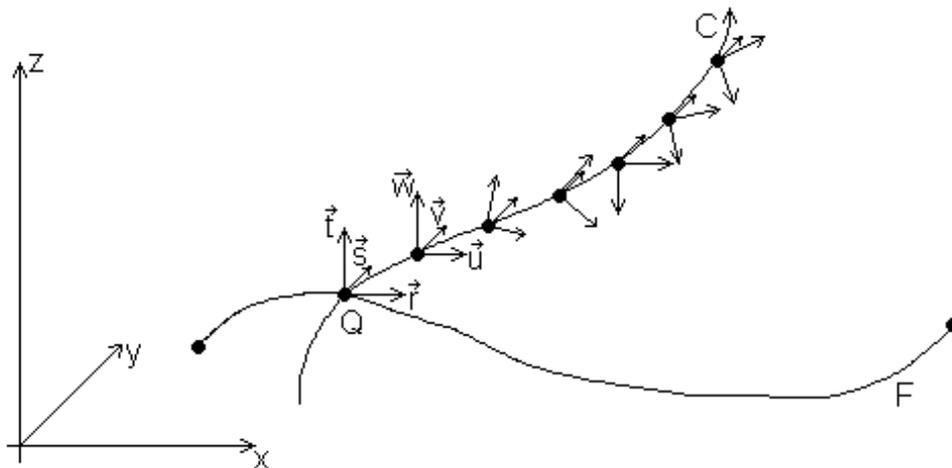


Abbildung 30: Flächendarstellung durch Sweeping

Durch sweeping-Modelle können einige GIS-typische Fragestellungen sehr gut beschrieben werden, z.B.: Welche Grundstücke einer Gemarkung liegen weniger als 100m von der Mittellinie einer geplanten Autobahntrasse entfernt?

**Modelle mit Flächen- oder Raunteilung:** Hier stellt man die Aufgabe, ein flächenhaftes Objekt in einer Ebene zu beschreiben. Es wird ein (achsenparalleles) Rechteck  $E$  in der Ebene dem Objekt umschrieben.  $E$  wird einer Zerlegung ( $\rightarrow$  Wahrscheinlichkeitsrechnung) in Teilmengen  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  unterzogen. Eine Teilmenge, die das Objekt nicht schneidet, heißt "weiß" (nicht belegt) und wird nicht weiter beachtet. Ein Teil, der ganz im Objekt liegt, heißt "schwarz" (belegt) und wird gemerkt. Alle anderen Teile sind "grau" (unentscheidbar), sie werden weiter unterteilt, mit den so erhaltenen Teilen wird wie eben beschrieben verfahren. Bei fortgesetzter Unterteilung werden die Teilgebiete immer kleiner, so dass sie schließlich eine vorgegebene Grenze unterschreiten, dann bricht das Verfahren ab. Das Objekt wird durch die Gesamtheit der gemerkten Teilgebiete modelliert. Dadurch wird die Gestalt des Objekts in einer baumartigen Struktur gespeichert. In praktischen Anwendungen entsteht die Zerlegung von  $E$  durch Halbieren der Seiten und Verbinden gegenüberliegender Teilpunkte, so dass an jedem Knoten maximal 4 Zweige fortsetzen (*Quadtree-Verfahren*). Im Raum lässt sich das Verfahren auf einen umhüllenden Quader anwenden, wegen der jeweils entstehenden acht Teilkörper heißt es hier *Octree-Verfahren*.

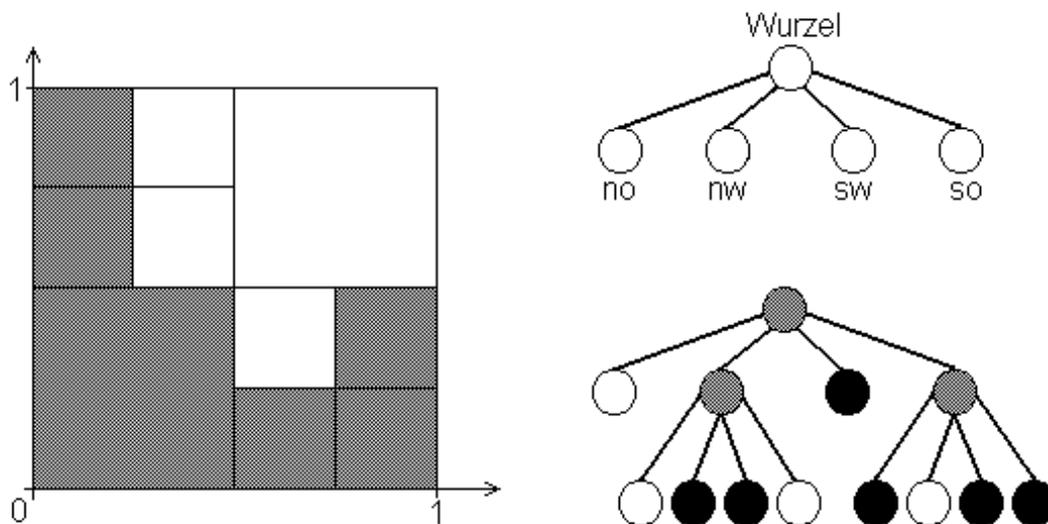


Abbildung 31: Octree - Darstellung (Lage der Teilquader / Darstellung eines Körpers)

Solche Baumstrukturen werden heute kaum in dieser einfachen Form zur Geometriebeschreibung verwendet, sie bilden jedoch die Grundlage zu bucketorientierten Speicherstrukturen für Geometriedaten (Vgl. Vorlesung D.Sosna: 'GIS II')

In der Praxis werden meist Aspekte verschiedene Modelltypen entsprechend der Aufgabenstellung benutzt, zumal die Informationen unter geeigneten Voraussetzungen an die Objekte aus einer Repräsentation in eine andere überführt werden können.

### 6.2.3 Mengensysteme und Boolesche Algebren

In der realen Welt haben viele geometrieverändernde Verfahren die Eigenschaft, dass ihre Anwendung auf einen Körper wieder einen Körper liefert (z.B. bei der spanabhebenden Werkstoffverformung). Dies legt es nahe, Modelle der Computergeometrie im Bereich der Algebren geometrischer Objekte zu suchen.

#### Boolesche Algebren von Punktmengen

SATZ: Die Potenzmenge  $P(\mathbb{R}^n)$  des Raumes  $\mathbb{R}^n$  der reellen Koordinaten- $n$ -Tupel ( $n \geq 1$ ) wird mit den Mengenoperationen Vereinigung  $\cup$ , Durchschnitt  $\cap$  und Komplement  $\text{cpl}$  zu einer Boolescher Algebra. Ihr Minimum ist die leere Menge  $\emptyset$ , ihr Maximum  $\mathbb{R}^n$ .

Diese Algebra ist zu umfangreich, sie enthält Mengen, die für praktische Anwendungen nicht relevant sind.

*Beispiel:* Sei

$$z_0(x, y) = \begin{cases} 1 & : x \text{ rational} \\ 0 & : x \text{ irrational.} \end{cases}$$

Die Punktmenge

$$Q = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq z_0\}$$

gehört zu  $P(\mathbb{R}^3)$ , eine Zeichnung kann nicht gegeben werden.

**Die Algebra regularisierter Punktmenge:** Um Modelle zu finden, bei denen wie in der realen Welt der Rand das Aussehen des Körpers bestimmt, sind Einschränkungen von  $P(\mathbb{R}^n)$  nötig, obiges Beispiel motiviert dies.

DEFINITION:  $X \subset \mathbb{R}^n$  heißt *regulär abgeschlossen*, falls  $X = cl \ int X$ .<sup>46</sup>

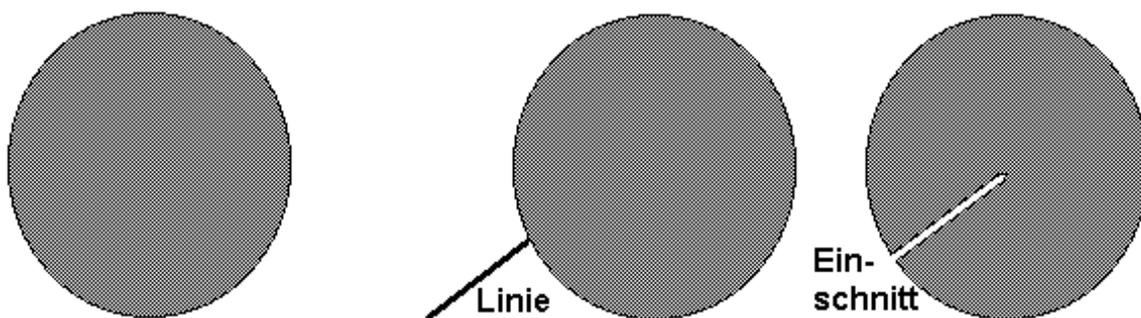


Abbildung 32: Regulär abgeschlossene Menge (Links) und nicht reg. abgeschlossene Mengen (Mitte und Rechts)

$M_a^{(n)}$  bezeichne die Gesamtheit der regulär abgeschlossenen Mengen des  $\mathbb{R}^n$ .

Jede regulär abgeschlossene Menge  $M$  ist eine Menge mit nirgends dichtem Rand  $B$ , d.h. für  $B = fr M$  ist  $int B = \emptyset$ .

DEFINITION: der *regularisierten Mengenoperationen*.

$R^{(n)}$  bezeichne die Menge aller Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  mit nirgends dichtem Rand. Dann werden folgende Abbildungen über regularisierten Mengen definiert:

*regularisierter Durchschnitt*  $\cap_a : M_a^{(n)} \times M_a^{(n)} \mapsto R^{(n)} : A \cap_a B := cl \ int(A \cap B)$

*regularisierte Vereinigung*  $\cup_a : M_a^{(n)} \times M_a^{(n)} \mapsto R^{(n)} : A \cup_a B := cl \ int(A \cup B)$

*regularisiertes Komplement*  $*_a : M_a^{(n)} \mapsto R^{(n)} : cpl_a A := cl \ int \ cpl A$

mit  $\emptyset_a := \emptyset, E_a := \mathbb{R}^n$

SATZ: Die regulär abgeschlossenen Mengen, versehen mit den regularisierten Mengenoperationen, bilden eine Boolesche Algebra.

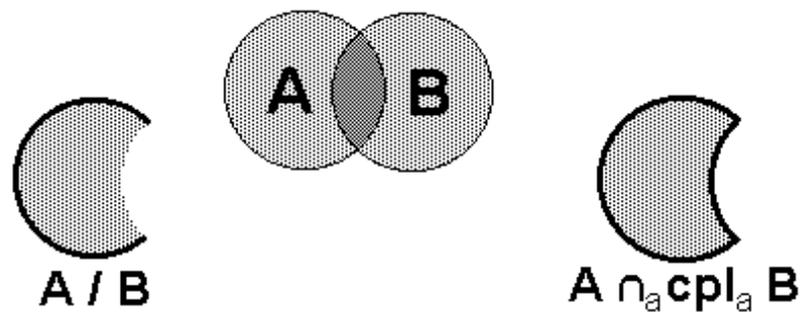
Für alle regulär abgeschlossenen Mengen gilt  $A \cup_a B := A \cup B$ . Abbildung 6.7.5 - 2 zeigt, dass sich die regularisierten Operationen i.A. von denen der klassischen Mengenlehre unterscheiden.

<sup>46</sup>Exakte Definition siehe Vorlesung Analysis, Topologische Räume

$int X$ : Menge der inneren Punkte von  $X$

$cl X$ : Abschluss von  $X$

$fr X$ : Rand von  $X$

Abbildung 33:  $A \setminus B = A \cap cpl(B)$  links und  $A \cap_a cpl_a B$  rechts

**Polyederalgebren:** Dies sind Unteralgebren der Punktmengealgebren, deren Elemente Polyeder sind.

**DEFINITION:** Sei  $F$  die Menge aller Funktionen  $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^1$ , wobei  $f$  ein  $n$ -stelliges Polynom höchstens 1. Grades ist, dann heißt  $H = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq 0, f \in F\}$  ein *abgeschlossener Halbraum*.

**DEFINITION:** Jede Punktmenge im  $\mathbb{R}^n$ , die sich aus einer endlichen Anzahl von abgeschlossenen Halbräumen dieses Raumes durch endlichhäufige Anwendung von Vereinigungs-, Durchschnits- und Komplementbildung darstellen lässt, ist ein *Polyeder*.

Diese Definition ist konstruktiv. Bemerkung: In der Vorlesung werden wir über Modelle in der Ebene sprechen. Die Polyeder dieser Definition sind die Polygone dort (s.S.85).

**SATZ:** Der Durchschnitt und die Vereinigung von endlich vielen Polyedern, die Komplementärmenge eines Polyeders und die Differenz zweier Polyeder sind Polyeder.

Dies folgt unmittelbar aus der Definition.

Folglich ist jeder offene Halbraum (als Komplement eines entsprechenden abgeschlossenen) ein Polyeder. Ebenso sind die leere Menge  $\emptyset$  und der  $\mathbb{R}^n$  Polyeder.

*Beispiel:* Körpermodell eines Quaders im  $\mathbb{R}^3$  aus 6 abgeschlossenen Halbräumen (s.S.75) Dieser Polyederbegriff kann verallgemeinert werden, wenn man für  $F$  bestimmte Klassen von Polynomen höheren Grades zulässt. Von besonderem Interesse sind dabei Bildungen im  $\mathbb{R}^3$ , die nichtkonstante lineare dreistellige Polynome und gewisse dreistellige Polynome 2. Grades zur Grundlage haben. Für diese ergeben sich als Lösungsmengen  $\{x : f(x) = 0, f \in F\}$  u.a. nicht ausgeartete *Quadriken*. Diese verallgemeinerten Polyeder werden in ingenieurtechnischen Anwendungen zur Beschreibung von Oberflächen (Karosserien, Schiffsrümpfe) zunehmend verwendet. In GIS können sie zur Modellierung von Geländeoberflächen dienen.

Mit den vorgestellten Typen ist die Gesamtheit der Algebren geometrischer Objekte keineswegs erschöpft. Für eine regulär abgeschlossene Menge  $X$  gehört das Paar  $(X, fr X)$  zu den *Fleisch-Haut-Figuren*, die mit geeigneten Operationen eine Algebra bilden. Ihr Vorteil ist, dass die Algorithmen sowohl Ergebnisse für die Volumenkomponente als auch für den Rand liefern. Der benötigte Aufwand ist allerdings dementsprechend groß.

### 6.3 Beschränkte geometrische Objekte in der Ebene.

Beziehungen zwischen solchen Objekten sollen mit den Mitteln der analytischen und der konstruktiven Geometrie analytisch fassbar und damit zusammenhängende Fragen auf der Grundlage der Ergebnisse von Berechnungen entscheidbar gemacht werden. Damit bilden

die Grundaufgaben dieses und des nächsten Abschnittes Bausteine in vielen Verfahren. Für die GIS-Darstellungen beschränkter Objekte ist eine Ebene mit kartesischem Koordinatensystem wichtig, weil mit den Gauß-Krüger-Koordinaten ein ebenes, rechtwinkliges Koordinatensystem in sehr intensiver Benutzung ist und somit eine solche Ebene mit kartesischem Koordinatensystem die Basis für die Objektmodellierung bilden kann.

Bemerkung: Obwohl im folgenden ebene Probleme bearbeitet werden, wird bei Bedarf jeder Vektor in der  $xy$ -Ebene auch als Vektor im  $\mathbb{R}^3$  angesehen, seine Komponente in  $z$ -Richtung ist dann Null. Dies ermöglicht die Nutzung von Vektor- und Spatprodukt als Mittel der arithmetischen Beschreibung geometrischer Sachverhalte. Als Ebene dient die  $xy$ -Ebene im  $\mathbb{R}^3$ , die  $z$ -Achse steht darauf senkrecht,  $\vec{e}_z = (0, 0, 1)^\top$  ist der Einheitsvektor im  $z$ -Richtung und die  $z$ -Komponente eines Vektors  $\vec{k}$  ist  $k_z = (\vec{k}, \vec{e}_z)$  <sup>47</sup>.

### Skalarprodukt, Vektorprodukt, Spatprodukt

Seien  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  drei Vektoren (im  $\mathbb{R}^3$  mit den Komponenten  $x_i, y_i$ , und  $z_i$   $\{i = 1, 2, 3\}$ ).  $\vec{e}_i$   $\{i = 1, 2, 3\}$  sind die Einheitsvektoren. Das *Skalarprodukt* wird definiert durch:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

Es bildet die Vektoren  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  in die reellen Zahlen ab und existiert für beliebige Dimension  $n$  des Raumes (Das Skalarprodukt ist nicht auf  $n = 3$  beschränkt).

Das *Vektorprodukt* bildet zwei Vektoren  $\vec{x}, \vec{y}$  auf einen dritten Vektor  $\vec{z}$  ab, es existiert in dieser Art nur im dreidimensionalen Raum (Die drei Vektoren  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  bilden ein Rechtssystem).

$$\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix}$$

Das *Spatprodukt* dreier Vektoren  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  ordnet ihnen eine Zahl zu. Es kann durch Vektor- und Skalarprodukt ausgedrückt werden.

$$\text{spat}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{y} \times \vec{z})$$

#### 6.3.1 Punkt und Strecke

Ein *Punkt*  $P$  wird durch seinen Ortsvektor  $\vec{x}_P$  beschrieben.<sup>48</sup>

DEFINITION: Eine *Strecke*  $\bar{s}$  ist die geradlinige Verbindung ihrer Endpunkte  $P_1, P_2$ , die durch die Ortsvektoren  $\vec{x}_1, \vec{x}_2$  charakterisiert werden. Sie hat die Parameterdarstellung  $\vec{x} = \vec{x}_1 + t(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)$  mit  $0 \leq t \leq 1$ , ihr wird die *Orientierung* in Richtung steigender Parameterwerte  $t$  zugeordnet.

<sup>47</sup>( , ) bezeichnet das Skalarprodukt der beiden Vektoren

<sup>48</sup>Bemerkung: Das Folgende beschränkt sich auf die sogenannte *Linien- und Kreisgeometrie*, andere Objekte, die analytisch durch Ausdrücke höherer Ordnung beschrieben werden, werden nicht betrachtet.

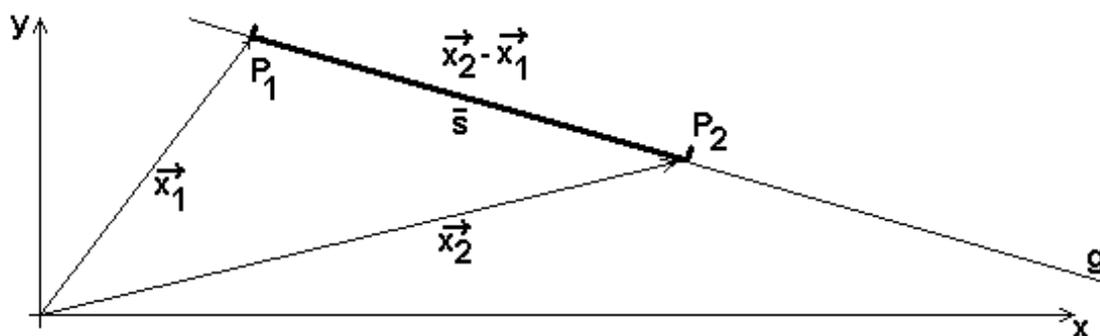


Abbildung 34: Die Strecke  $\bar{s}$  auf der Trägergeraden  $g$  wird durch die Endpunkte  $P_1, P_2$  festgelegt.

**Inzidenz von Punkt und Strecke.**

GRUNDAUFGABE 1: Gegeben seien eine Strecke  $\bar{s}$  durch  $\vec{x}_1, \vec{x}_2$  und der Punkt  $P$  durch  $\vec{x}_P$ . Was kann über die Lage von  $P$  bezüglich  $\bar{s}$  ausgesagt werden?

LÖSUNG: Falls  $k_z = ((\vec{x}_P - \vec{x}_1) \times (\vec{x}_2 - \vec{x}_1))_z > 0$ , liegt  $P$  rechts der die orientierte Strecke enthaltenden Trägergeraden  $g$ , bei  $k_z < 0$  links von ihr, bei  $k_z = 0$  auf ihr.

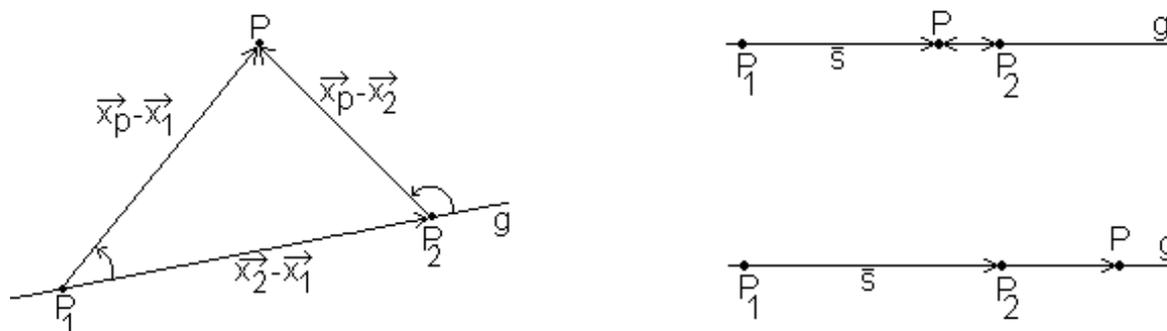


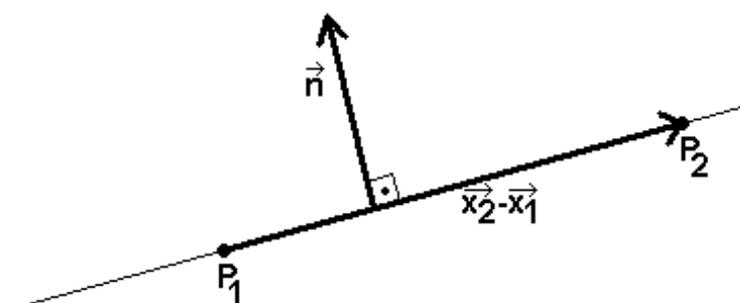
Abbildung 35:  $P$  links von  $\bar{s}$ ,  $P$  auf  $\bar{s}$  (oben),  $P$  auf  $g \setminus \bar{s}$  (unten)

Bei  $k_z = 0$  ist die Frage, ob  $P \in \bar{s}$  ist, durch das Skalarprodukt  $d = (\vec{x}_P - \vec{x}_1, \vec{x}_P - \vec{x}_2)$  zu klären:  $P \in \bar{s}$  g.d.w.  $d \leq 0$ ; bei  $d > 0$  gilt  $P \in g \setminus \bar{s}$ .

Die Richtung der *Normalen*  $\vec{n}$  zur Richtung der Strecke  $\bar{s}$  ergibt sich zu

$$\vec{n} = \vec{e}_z \times (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) = (-(y_2 - y_1), (x_2 - x_1))^T.$$

Wird eine Strecke im Verhältnis  $m : (1 - m)$ ,  $m \in \mathbb{R}$  geteilt, errechnet sich der Teilpunkt  $T$  zu  $\vec{x}_T = \vec{x}_1 + m(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)$ . Für  $0 \leq m \leq 1$  ist  $T$  *innerer Teilpunkt*, für alle anderen reellen Werte von  $m$  *äußerer Teilpunkt*.

Abbildung 36: Normale  $\vec{n}$  einer Strecke**Schnitt zweier Strecken.**

GRUNDAUFGABE 2: Gegeben seien zwei Strecken  $\bar{s}_1, \bar{s}_2$  durch die Ortsvektoren  $\vec{x}_i$  und  $\vec{y}_i$ ,  $i = 1, 2$  mit  $\bar{s}_1 \equiv \vec{x} = \vec{x}_1 + (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)t_1$  und

$$\bar{s}_2 \equiv \vec{y} = \vec{y}_1 + (\vec{y}_2 - \vec{y}_1)t_2, \text{ mit } 0 \leq t_{1,2} \leq 1.$$

Haben die Strecken gemeinsame Punkte?

LÖSUNG: Die Trägergeraden werden zum Schnitt gebracht. Zusätzlich ist zu entscheiden, ob die so gefundenen Punkte innerhalb beider Strecken liegen.

1. Fall: Die Koeffizientendeterminante des Gleichungssystems für  $t_1, t_2$ , die aus den Richtungsvektoren  $\vec{x}_2 - \vec{x}_1$  und  $\vec{y}_2 - \vec{y}_1$  zu  $\Delta = ((\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \times (\vec{y}_2 - \vec{y}_1))_z$  berechnet wird, ist ungleich Null, d.h. die Strecken sind nicht parallel. Die Forderung, dass sich die Strecken schneiden, kann geometrisch interpretiert werden: die Endpunkte jeder Strecke liegen nicht auf einer Seite der jeweils anderen Strecke, in Formeln:

$$\text{sgn}((\vec{y}_2 - \vec{x}_1) \times (\vec{x}_2 - \vec{x}_1))_z \neq \text{sgn}((\vec{y}_1 - \vec{x}_1) \times (\vec{x}_2 - \vec{x}_1))_z \quad \text{und}$$

$$\text{sgn}((\vec{x}_2 - \vec{y}_1) \times (\vec{y}_2 - \vec{y}_1))_z \neq \text{sgn}((\vec{x}_1 - \vec{y}_1) \times (\vec{y}_2 - \vec{y}_1))_z.$$

Der Schnittpunkt  $S$  hat dann die Parameterwerte

$$t_{s_1} = \frac{1}{-\Delta} ((\vec{y}_2 - \vec{y}_1) \times (\vec{y}_1 - \vec{x}_1))_z, \quad t_{s_2} = \frac{1}{-\Delta} (\vec{x}_2 - \vec{y}_1) \times (\vec{y}_1 - \vec{x}_1)_z$$

2. Fall:  $\Delta = 0$ , die Strecken sind parallel oder haben dieselbe Trägergerade. Um diese Möglichkeiten zu trennen, prüft man, ob ein Endpunkt von  $\bar{s}_2$  auf der Trägergeraden von  $\bar{s}_1$  liegt. Nur dann kann es gemeinsame Punkte der Strecken geben. Dies ist also notwendige Bedingung für  $\bar{s}_1 \cap \bar{s}_2 \neq \emptyset$ . Hinreichend ist, dass mindestens ein Endpunkt von  $\bar{s}_2$  innerhalb von  $\bar{s}_1$  liegt oder umgekehrt ( $\rightarrow$  Grundaufgabe 1).

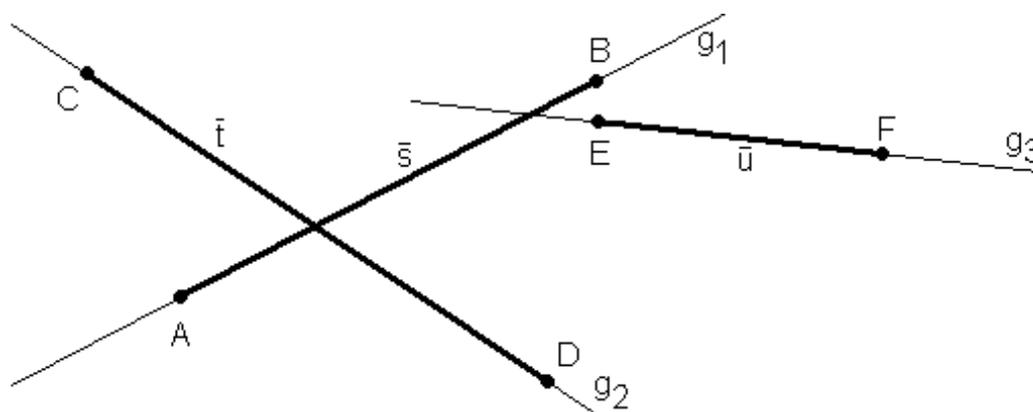


Abbildung 37: Schnittbedingung geometrisch interpretiert

**Abstände.**

DEFINITION:

Der Abstand  $a$  zweier Punkte  $P_1, P_2$  ist die Norm der Differenz der zugehörigen Ortsvektoren:  $a = \|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|$ .

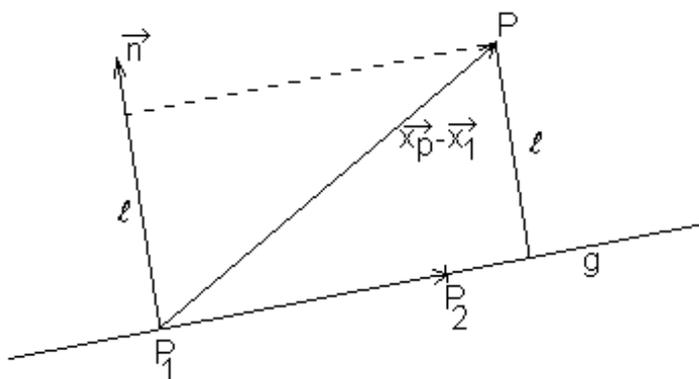
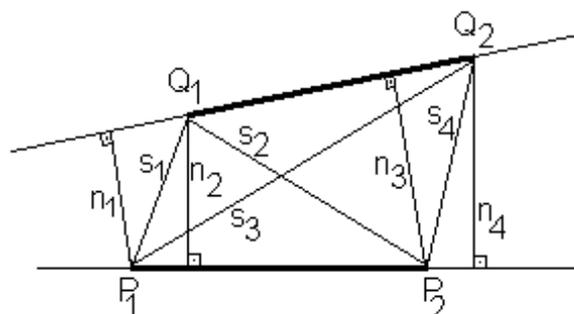
Der Abstand eines Punktes  $P$  von einer Geraden  $g$  berechnet sich aus der orthogonalen Projektion des Differenzvektors  $\vec{x}_P - \vec{x}_1$  auf die Normalenrichtung von  $g$ , d.h.  $a(P, g) = |(\vec{x}_P - \vec{x}_1, \vec{n}_g)|$ , wobei  $\vec{n}_g$  der zur Länge 1 normierte Normalenvektor (in der Ebene) zu  $g$  ist. Es gilt nach Einsetzen von  $\vec{n}_g$ :

$$a(P, g) = \frac{|((\vec{x}_P - \vec{x}_1) \times (\vec{x}_2 - \vec{x}_1))_z|}{\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|}$$

Der Abstand  $a$  zweier Strecken  $\bar{s}_1, \bar{s}_2$  ist die Länge der kürzesten Verbindungslinie von zwei Punkten  $A_1, A_2$ , von denen  $A_1$  auf  $\bar{s}_1, A_2$  auf  $\bar{s}_2$  liegt.

Schneiden sich  $\bar{s}_1$  und  $\bar{s}_2$ , ist  $a = 0$ . Andernfalls ist stets  $a > 0$ .

Der Abstand  $a$  ergibt sich als das Minimum, welches gebildet wird aus der kürzesten Länge eines Lotes, das von einem Endpunkt einer Strecke auf die Trägergeraden der anderen Strecke gefällt werden kann und dessen Lotfußpunkt auf der anderen Strecke liegt, und dem kürzesten Abstand zweier Endpunkte auf verschiedenen Strecken.

Abbildung 38: Abstand eines Punktes  $P$  von einer Geraden  $g$ Abbildung 39: Abstand zweier Strecken als Minimum der Länge der unterbrochenen Strecken. Die Strecken  $n_1$  und  $n_4$  gehen nicht in die Minimumbildung ein.

Die Entscheidung, ob der Lotfußpunkt auf die zweite Strecke fällt, lässt sich treffen, wenn man weiß, ob der Ausgangspunkt des Lotes in dem Streifen liegt, der von den Senkrechten in den Endpunkten der jeweils anderen Strecke aufgespannt wird. Ein Punkt  $P$  liegt innerhalb oder auf dem Rand des Streifens, der von den Normalen in den Endpunkten  $P_1, P_2$  einer Strecke aufgespannt wird, falls  $\text{sgn}(\vec{x}_2 - \vec{x}_1, \vec{x}_P - \vec{x}_1) \neq \text{sgn}(\vec{x}_2 - \vec{x}_1, \vec{x}_P - \vec{x}_2)$ . Trifft das Gleichheitszeichen zu, liegt  $P$  außerhalb des abgeschlossenen Streifens.

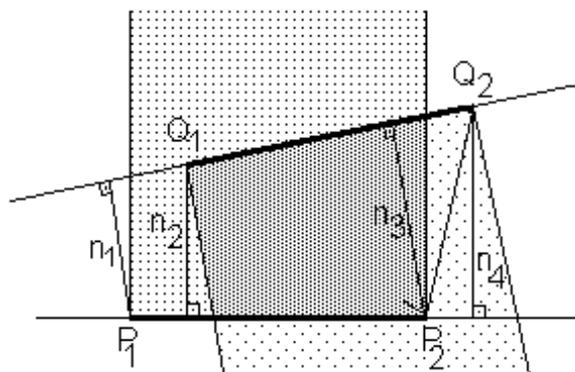


Abbildung 40: Streifenbedingung zur Auswahl der Lote bei der Berechnung des Abstands zweier Strecken

### 6.3.2 Polygonzüge

DEFINITIONEN: Die geradlinigen Verbindungen  $P_i, P_{i+1}, i = 1, \dots, n-1$  der Punkte  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , wobei drei aufeinanderfolgende Punkte nicht auf einer Geraden liegen, bilden einen *Polygonzug*. Die Verbindungsstrecken heißen *Seiten*.

Der Polygonzug heißt *orientiert*, falls auf ihm nach  $P_i$  stets  $P_{i+1}$  im Sinne der Orientierung der Strecken  $\overrightarrow{P_i P_{i+1}}$  folgt ( $P_{i+1}$  Nachfolger von  $P_i$ , geschrieben  $P_i < P_{i+1}$ ).

Ein Polygonzug  $P_1, \dots, P_n$  ist *geschlossen*, falls  $P_{n+1} = P_1$  definiert ist.

Er ist *doppelpunktfrei*, wenn er sich selbst nicht schneidet (außer evt. in  $P_{n+1} = P_1$ ).

Ein geschlossener, doppelpunktfreier Polygonzug heißt *orientiert*, wenn er für  $P_1, \dots, P_n$  orientiert ist und  $P_n < P_1$  zutrifft.

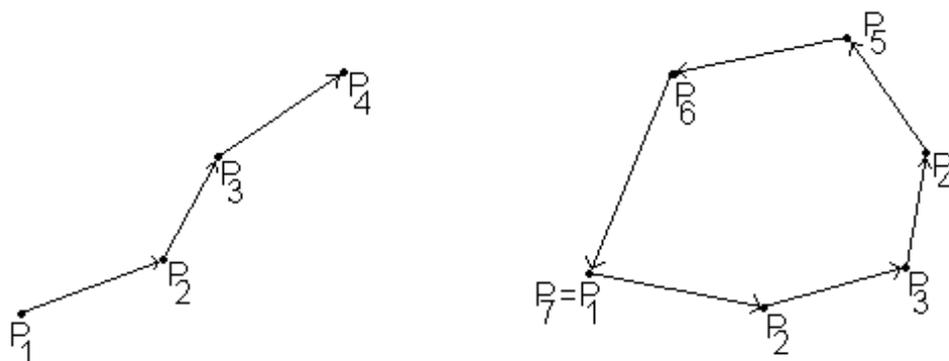


Abbildung 41: Polygonzug allgemein (links) und geschlossen, orientiert (rechts)

Ein geschlossener, orientierter Polygonzug  $p$  ist *positiv orientiert*, falls das Kurvenintegral  $\frac{1}{2} \int_C (xdy - ydx) > 0$  ausfällt.

Wegen der besonderen Gestalt der Kurve (Polygonzug) kann das Integral durch eine (endliche) Summe berechnet werden.

### 6.3.3 Polygone

Ein geschlossener, doppelunktfreier Polygonzug teilt die Ebene in zwei disjunkte Teile, der beschränkte Teil (siehe dazu Satz von JORDAN - BROUWER) ist das vom Polygonzug berandete *Polygon*<sup>49</sup>.

---

<sup>49</sup>Auf Seite 79 wurde eine erste Definition des Begriffes Polygon gegeben. Folglich bedarf die hier gegebene Definition eines Beweises, daß sie der ersten äquivalent ist. In einer Mathematikvorlesung würde dieser Beweis jetzt folgen

**Konvexe Polygone.** Vorgelegt sei ein geschlossener Polygonzug  $p$  durch die Punkte  $P_1, \dots, P_n$  mit  $P_0 = P_n, P_{n+1} = P_1$ . Ein Eckpunkt  $P_i$  heißt *konvex*, falls für die anliegenden Strecken gilt:  $((\vec{x}_i - \vec{x}_{i-1}) \times (\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i))_z > 0$  (Ist diese z-Komponente negativ, ist der Eckpunkt nichtkonvex). Ein geschlossener Polygonzug ist konvex, wenn alle Eckpunkte konvex sind.

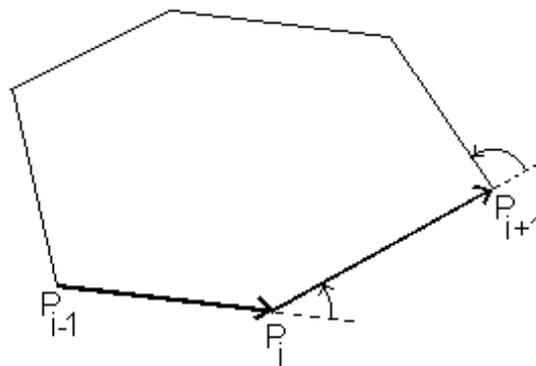


Abbildung 42: Eckpunkt  $P_i$  konvex  
(hier: alle Eckpunkte konvex, d.h. konvexer Polygonzug)

**Inzidenz Punkt und Polygon.** An dieser Aufgabenstellung wird die Unterschiedlichkeit der Lösungsalgorithmen in Abhängigkeit vom verwendeten Modell deutlich.

**GRUNDAUFGABE 3:** Gegeben seien ein geschlossener Polygonzug  $p$ , der ein Flächenstück  $F \subset \mathbb{R}^2$  umschließt, durch die Punktfolge  $P_1, \dots, P_n, P_{n+1} = P_1$  und ein Punkt  $Q$ . Liegt  $Q$  in Innern von  $p$ , also in  $F$ ?

**LÖSUNG:**  $Q$  liegt im Innern von  $p$ , falls die Anzahl der Schnittpunkte jedes beliebigen Strahls  $\vec{x}(t) = \vec{x}_Q + t\vec{x}_r, t > 0$ , der von  $Q$  mit dem Richtungsvektor  $\vec{x}_r$  ausgeht, mit dem das Flächenstück begrenzenden Polygonzug ungeradzahlig ist. Ist die Anzahl stets gerade, gehört  $Q$  dem Äußeren von  $F$  an. Zu Punkten auf dem Rand gehören sowohl Strahlen mit gerader als auch mit ungerader Schnittpunktzahl.

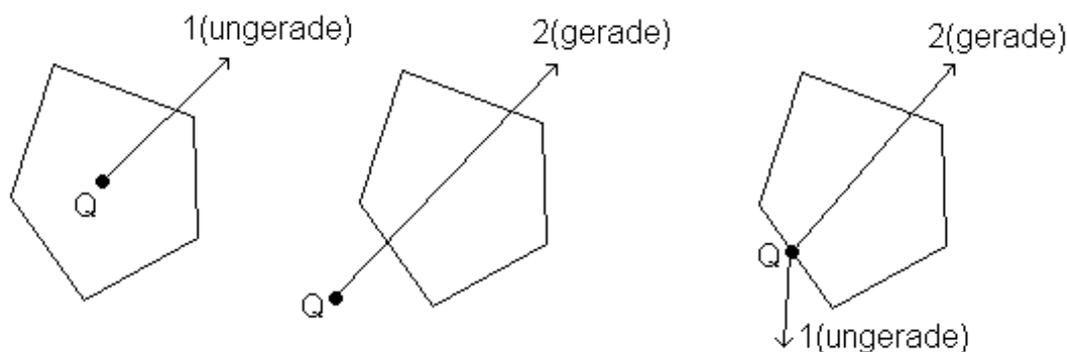


Abbildung 43: Vielfachheit des Strahlschnittpunkts mit dem Polygonzug

Für dieses einfache Kriterium ist die Zählung *entarteter Schnittpunkte* zu erklären. Das sind alle die Schnittpunkte, in denen der Strahl berührt wird, oder Strecken, die ganz oder teilweise auf dem Strahl liegen. Liegt ein Eckpunkt  $P_i$  des Polygonzuges  $p$  auf dem von  $Q$  ausgehenden Strahl  $\vec{h}$  mit der Trägergeraden  $g$ , so besitzt der Schnittpunkt von  $h$  mit  $p$  ungerade Vielfachheit, wenn  $P_{i-1}$  und  $P_{i+1}$  auf verschiedenen Seiten von  $g$  liegen, und gerade Vielfachheit, wenn sie auf derselben Seite sind. Liegt  $P_{i+1}$  bzw.  $P_{i-1}$  auf  $g$ , so ist dieser Eckpunkt durch  $P_{i+2}$  bzw.  $P_{i-2}$  zu ersetzen, die nach Definition von  $p$  dann nicht auf  $g$  liegen. In dieser Formulierung ergibt sich die Lösung mittels Grundaufgabe 1.

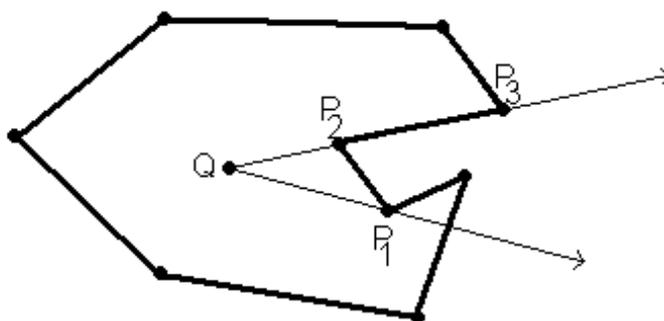


Abbildung 44: Entartete Schnittpunkte

Eine andere Methode der Inzidenzbestimmung beruht auf folgender Überlegung: Liege  $Q$  im Innern eines positiv orientierten Polygonzuges  $p$ . Der Punkt  $S$  liege auf  $p$  und falle anfangs mit  $P_1$  zusammen. Durchläuft  $S$   $p$  einmal im Sinne der Orientierung, so überstreicht der Strahl von  $Q$  nach  $S$  den Winkelbereich von 0 bis  $2\pi$ , liegt jedoch  $Q$  außerhalb  $p$ , ist die Winkeländerung 0 – in negativer Richtung durchlaufene Winkel werden dabei negativ gezählt. Der beim Übergang des Punktes  $S$  von einem Eckpunkt  $P_i$  zum nächsten  $P_{i+1}$  überstrichene Winkel wird aus dem Dreieck  $\Delta QP_iP_{i+1}$  (z.B mittels Sinussatz) unter Beachtung des Vorzeichens berechnet.

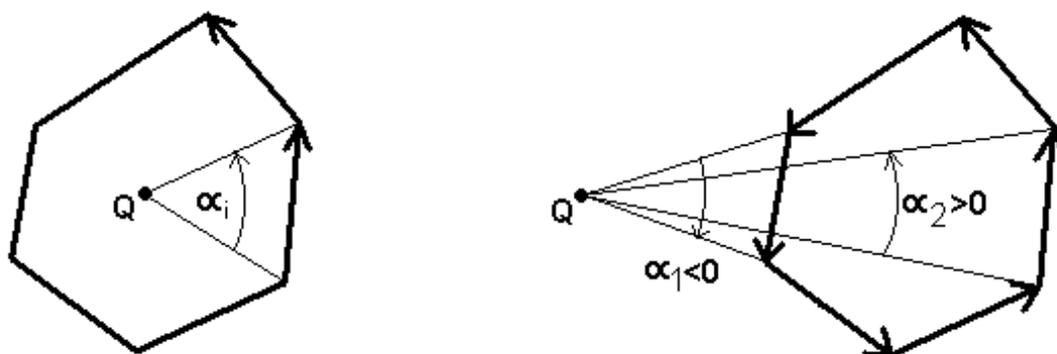


Abbildung 45:  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_5 = 0 \rightarrow Q$  außerhalb des Polygons,  
 $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_5 = 2\pi \rightarrow Q$  im Polygon

Grundaufgabe 3 und die vorgestellte Lösung setzen eine randorientierte Darstellung der Polygonfläche durch Kenntnis des berandenden Polygonzugs voraus. Dieser besteht aus Strecken, die als eindimensionale Objekte durch ihren Rand, nämlich ihre Endpunkte, beschrieben werden.

Andererseits ist ein Polygon ein Polyeder im  $\mathbb{R}^2$  und kann als Mengenkonstruktion aus abgeschlossenen Halbräumen beschrieben werden (Beispiel s.S.75), die durch eine Mengenfunktion über den Halbräumen gegeben wird. Ersetzt man formal in dem zugehörigen Ausdruck die Zeichen  $\cap$  durch  $\wedge$  (und),  $\cup$  durch  $\vee$  (oder),  $\text{cpl}$  durch  $\neg$  (nicht),  $\emptyset$  durch falsch,  $\mathbb{R}^n$  durch wahr, entsteht die *zugeordnete Wahrheitsfunktion*. Soll geprüft werden, ob ein Punkt  $Q$  im Polygon liegt, so ist zunächst die Inzidenz für die Halbebenen zu klären, und mit diesen Werten der Wahrheitswert der zugeordneten Funktion zu berechnen.

*Beispiel:* Gegeben ein Dreieck  $\Delta$  in der  $xy$ -Ebene als Durchschnitt der Halbräume  $\text{HR}_1 : y \geq 0$ ,  $\text{HR}_2 : x \geq 0$ ,  $\text{HR}_3 : x + y \leq 1$ . Liegt der Punkt  $Q$  mit  $x_Q = (1, 1)^\top$  im Dreieck?

*Lösung:*  $\Delta = \text{HR}_1 \cap \text{HR}_2 \cap \text{HR}_3$ . Die zugeordnete Wahrheitsfunktion ist  $w = w_1 \wedge w_2 \wedge w_3$ .

Die Inzidenzuntersuchung für die Halbebenen liefert:

$w_1 = \{Q \in \text{HR}_1?\} = \text{wahr}$ ,  $w_2 = \{Q \in \text{HR}_2?\} = \text{wahr}$ ,

$w_3 = \{Q \in \text{HR}_3?\} = \text{falsch}$ .

Einsetzen ergibt  $w = \text{falsch}$ , also liegt  $Q$  nicht in  $\Delta$ . (Abbildung 6.)

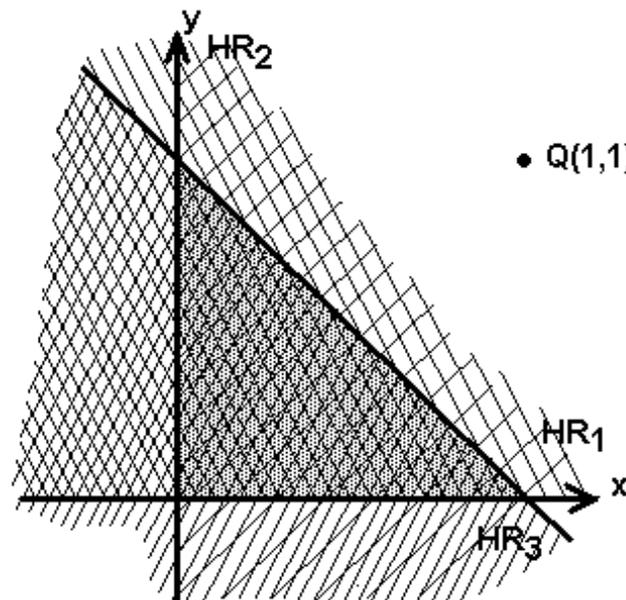


Abbildung 46: Inzidenz Punkt, Polygon bei konstruktiver Darstellung

**Schnitt Strecke - Polygonzug:** Gegeben sei ein geschlossener, positiv orientierter Polygonzug  $p$  durch die Punkte  $P_1, P_2, \dots, P_n$  als Rand eines ebenen Flächenstückes und eine orientierte Strecke  $\bar{s}$  durch ihre Endpunkte  $Q_1, Q_2$ . Ein Schnittpunkt von  $p$  und  $\bar{s}$  existiert, wenn die Schnittbedingung für zwei Strecken nach Grundaufgabe 2 von  $\bar{s}$  und mindestens einer Seite  $\overline{P_i P_1}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ),  $\overline{P_n P_1}$  erfüllt wird.

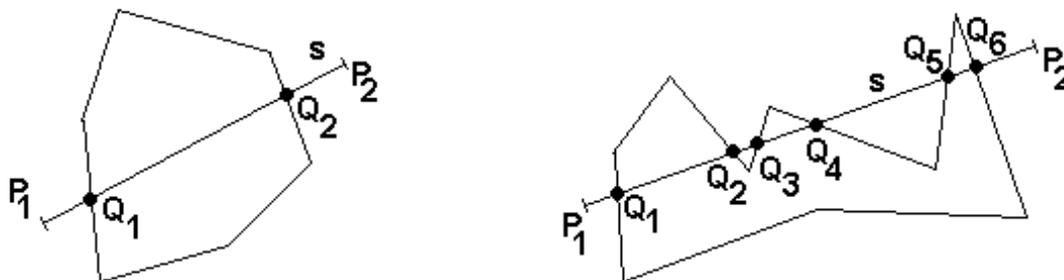


Abbildung 47: Eine Strecke schneidet den Polygonzug evt. in mehreren Punkten

Im allgemeinen muß man dabei alle Seiten von  $p$  überprüfen, um alle Schnittpunkte mit  $\bar{s}$  zu finden. Ist  $p$  konvex, schneidet eine Gerade  $g$  (und damit eine auf  $g$  liegende Strecke  $\bar{s}$ ) in höchstens zwei Punkten. Sind diese gefunden, wird die Berechnung beendet. Solche Überlegungen spielen eine Rolle, um bei Implementierungen der Verfahren in einem Computer Rechenzeit zu sparen. Bei GIS werden häufig achsenparallele Rechtecke als umfassende Polygone für komplexgestaltige Objekte verwendet und als Attribut des Objekts mit in der Datenbank abgelegt. Damit werden Inzidenzprobleme, deren Lösungsalgorithmen bei komplexen Objekten sehr rechenzeitaufwendig sein können, einem Vortest unterzogen: Gibt es eine Inzidenz mit dem umbeschriebenen Rechteck. Fällt dieser schnell zu berechnende Vortest negativ aus, kann auf den eigentlichen Test verzichtet werden.

*Beispiel:*  $p$  sei ein achsenparalleles Rechteck. Die Trägergeraden der Seiten teilen die Ebene in 9 Teile, die durch die Attribute  $o$ (ben),  $u$ (nten),  $l$ (inks) und  $r$ (echts) markiert sind (doppelte und kein Attribut sind möglich).

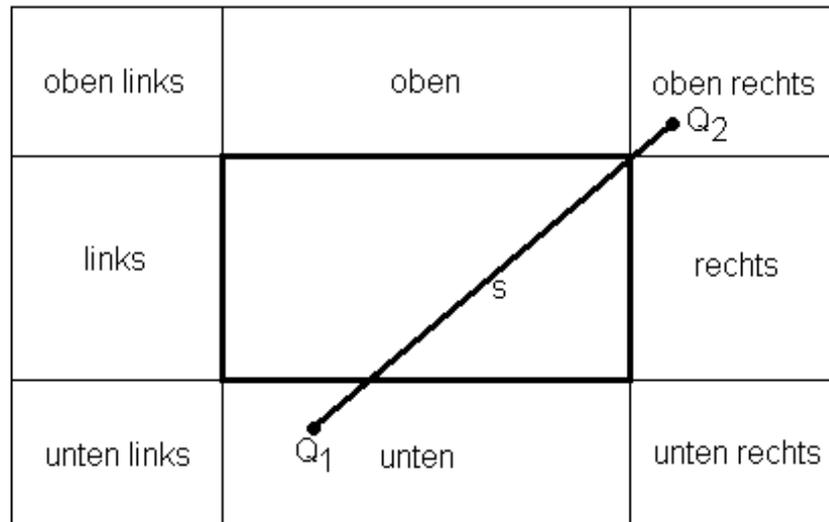


Abbildung 48: Strecke  $\bar{s}$  schneidet achsenparalleles Rechteck

Für die Endpunkte  $Q_1, Q_2$  von  $\bar{s}$  werden die Mengen  $M_1, M_2$  gebildet, die die jeweils zutreffenden Attribute enthalten, z.B.  $M_1 = \{u\}$ ,  $M_2 = \{o, r\}$ . Die Idee zur Auswertung dieser Mengen beruht auf Aussagen über konvexe Mengen: ist  $M_1 \cup M_2 = \emptyset$ , so liegt  $\bar{s}$  ganz im Rechteck, ist  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ , so schneidet  $\bar{s}$  das Rechteck nicht. In allen anderen Fällen sind Schnittpunkte des Rechtecks mit der Strecke nicht auszuschließen.

Das folgende Beispiel beschreibt den Algorithmus zum Auffinden aller Schnittpunkte des achsenparallelen Rechtecks mit  $\bar{s}$  in Form eines Struktogramms. Anwendung findet er in der Computergrafik, wenn es beim Zeichnen einer Strecke um die Begrenzung des Bildes auf den Teil geht, der sich in einem gegebenen Zeichenfenster befindet.

*Beispiel:*(Sutherland-Clipping). Vorgelegt seien eine Strecke  $\bar{s}$  mit den Endpunkten  $P_1, P_2$  und ein Rechteck (Fenster) durch die Geraden  $g_L : x = x_{min}, g_R : x = x_{max}, g_U : y = y_{min}, g_O : y = y_{max}$  mit  $x_{min} < x_{max}, y_{min} < y_{max}$ . Gesucht wird die im Fenster liegende Teilstrecke von  $\bar{s}$ .

*Lösung:* Zunächst werden zwei Teilprobleme gelöst. Das Verfahren  $SP(s, h; Q)$  möge den Schnittpunkt  $Q$  zwischen der Strecke  $\bar{s}$  und der Geraden  $h$  ermitteln, während  $TestePunkt(Q; M)$  berechnet, in welchem Teil der Ebene der Punkt  $Q$  liegt und bildet die Menge  $M$  der dazugehörigen Attribute.

**TestePunkt(Q;M)**

<b>M := ∅</b>									
ja		<b>x &lt; x<sub>min</sub>?</b>		nein					
<b>M = M<sub>1</sub> U {L}</b>		ja		<b>x &gt; x<sub>max</sub>?</b>		nein			
		<b>M = M<sub>1</sub> U {R}</b>							
ja		<b>y &lt; y<sub>min</sub>?</b>				nein			
<b>M = M<sub>1</sub> U {U}</b>		ja		<b>y &gt; y<sub>max</sub>?</b>				nein	
		<b>M = M<sub>1</sub> U {O}</b>							

Die gesuchte Teilstrecke wird in mehreren Schritten berechnet, dabei erfolgt eine rekursive Nutzung des Verfahrens:

**Clipp(P<sub>1</sub>;P<sub>2</sub>)**

<b>TestePunkt(P<sub>1</sub>; M<sub>1</sub>);                  TestePunkt(P<sub>2</sub>; M<sub>2</sub>);                  s = Strecke(P<sub>1</sub>; P<sub>2</sub>);</b>													
ja		<b>M<sub>1</sub> U M<sub>2</sub> = ∅ ?</b>				nein							
<b>s vollständig im abge- schlossenen Fenster</b>		ja		<b>M<sub>1</sub> ∩ M<sub>2</sub> = ∅ ?</b>				<b>s nicht im Fenster</b>					
		ja		<b>M<sub>1</sub> = ∅ ?</b>									
		Vertausche M <sub>1</sub> & M <sub>2</sub> sowie P <sub>1</sub> & P <sub>2</sub>											
		Fall		L ∈ M <sub>1</sub>		R ∈ M <sub>1</sub>				O ∈ M <sub>1</sub>		U ∈ M <sub>1</sub>	
		SP(s, gL;P <sub>1</sub> )		SP(s, gR;P <sub>1</sub> )		SP(s, gO;P <sub>1</sub> )				SP(s, gU;P <sub>1</sub> )			
		<b>Clipp(P<sub>1</sub>;P<sub>2</sub>)</b>											

Der Schnitt zweier Polygone in der Ebene ist für eine Reihe anderer Aufgaben wichtig, z.B. für die Lösung von Verdeckungsproblemen der Computergrafik im Bildschirmkoordinatensystem.

Die Idee einiger dazu existierender Verfahren, die auch in der darstellenden Geometrie genutzt wird, besteht darin, jede Strecke des einen Polygonzuges mit jeder Strecke des anderen zu schneiden und aus den so erhaltenen Schnittpunkten und Strecken den Rand des gesuchten Polygonzuges mit Hilfe von Randaussagen bei regularisierten Mengenoperationen (s.S. 78) zu konstruieren und zu beschreiben, so dass er für weitere Operationen zur Verfügung steht.

### 6.3.4 Kreis und Kreisbogen

*Bemerkung: Dieses Kapitel war nicht Gegenstand der Vorlesung, soll hier jedoch der Vollständigkeit halber mit aufgenommen werden.*

DEFINITION: Eine *Kreislinie*  $k$  ist der geometrische Ort aller Punkte, die von einem festen Punkt  $M$  den Abstand  $r$  haben.

Eine *Kreislinie*  $k$  wird also durch den Mittelpunkt  $M$ , mit dem Ortsvektor  $\vec{x}_M = (x_M, y_M)^T$  und den Radius  $r$ , als geometrischer Ort bestimmt.

Durch  $\sigma = \text{sgn} \left( \oint_k y dx - x dy \right)$  wird dieser geschlossenen Kurve  $k$  eine *Orientierung*  $\sigma$  zugeordnet.

Ein *Kreisbogen* wird durch die zusätzliche Angabe von Anfangspunkt  $P_1$  und Endpunkt  $P_2$  beschrieben.

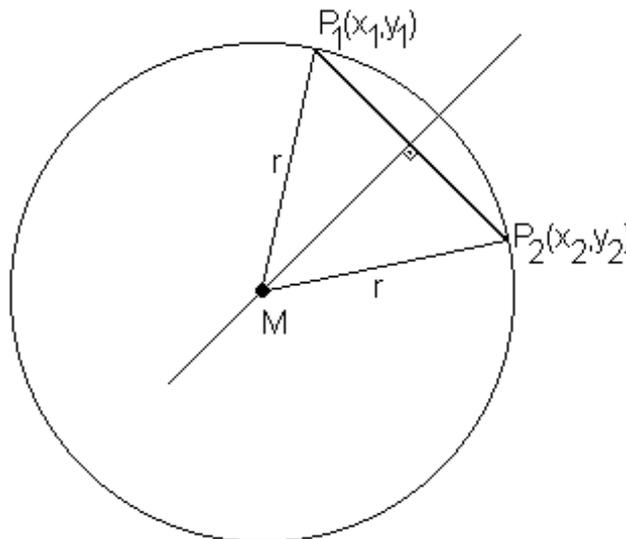


Abbildung 49: Zur Berechnung des Kreismittelpunktes

Kreis und Kreisbogen können als Punkte  $P$  der Ebene, die von einem festen Punkt  $M$  einen gegebenen Abstand  $r$  haben, charakterisiert werden:  $k = \{P: \|\vec{x}_P - \vec{x}_M\| = r\}$ . Für Berechnungen nützlicher ist die *Parameterdarstellung*  $\vec{x}_P = \vec{x}_M + \mathbf{D}_\varphi(\vec{x}_1 - \vec{x}_M)$ , dabei bezeichnet  $\vec{x}_1$  einen beliebigen Punkt auf der Peripherie des Kreises und

$$\mathbf{D}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

die Rotationsmatrix um den Winkel  $\varphi$ . Für den Kreis wird  $\vec{x}_1 - \vec{x}_M = (r, 0)^\top$  gewählt und  $\varphi$  auf  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  begrenzt. Zur Beschreibung eines Kreisbogens zwischen  $\vec{x}_1$  und  $\vec{x}_2$  genügt  $\varphi$  der Einschränkung  $0 \leq \varphi \leq (\varphi_2 - \varphi_1) \bmod 2\pi$ , wobei  $\varphi_1, \varphi_2$  die Polarwinkel zwischen der positiven  $x$ -Achse und  $(\vec{x}_1 - \vec{x}_M)$  bzw.  $(\vec{x}_2 - \vec{x}_M)$  angeben.

Sind der Radius  $r$  und zwei Punkte  $P_1, P_2$  auf der Peripherie bekannt, können die Koordinaten des Mittelpunkts berechnet werden.

$$\vec{x}_M = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{2} + \frac{\sigma}{l} \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}} \begin{pmatrix} -(y_2 - y_1) \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

mit  $l = \|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|$  und der Orientierung  $\sigma$  des Kreises.

Ob ein Punkt  $P$  in einer Kreisscheibe oder auf einer Kreislinie liegt, kann durch Vergleich des Abstandes  $\|\vec{x}_P - \vec{x}_M\|$  mit dem Radius  $r$  entschieden werden:

$$\|\vec{x}_P - \vec{x}_M\| \begin{cases} = r & : P \text{ auf der Kreislinie} \\ < r & : P \text{ liegt in der Kreisscheibe} \\ > r & : P \text{ liegt außerhalb der Kreisscheibe} \end{cases}$$

### Schnitt von Strecke und Kreis.

GRUNDAUFGABE 4: Gegeben seien eine Strecke  $\bar{s}$  mit den Endpunkten  $P_1, P_2$  und ein Kreis  $k$  mit dem Mittelpunkt  $M$  und dem Radius  $r$ . Wo liegen die Schnittpunkte von Kreislinie und Strecke?

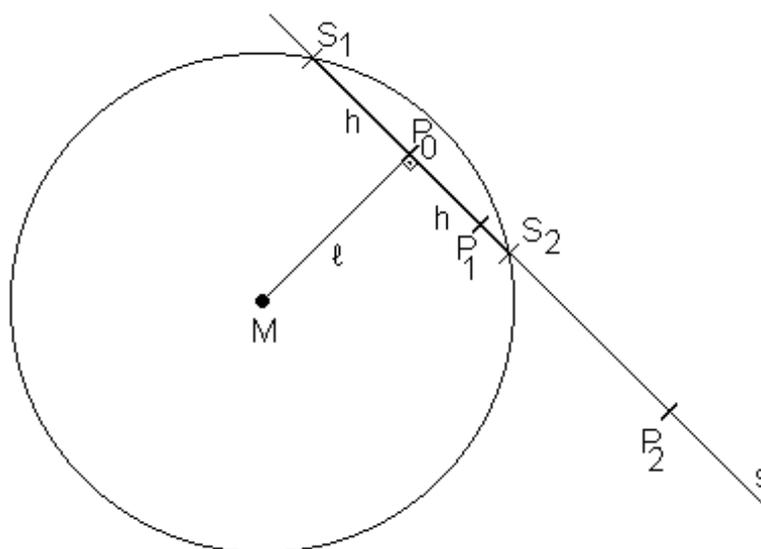


Abbildung 50: Schnitt von Kreis und Strecke

LÖSUNG (für Grundaufgabe 4): Sei  $P_o$  Fußpunkt des Lotes von  $M$  auf  $g$ , die Trägergerade von  $\bar{s}$ .  $\vec{x}_o$  ist der zugehörige Ortsvektor. Für die gesuchten Schnittpunkte  $S_1, S_2$  mit den Ortsvektoren  $\vec{y}_1, \vec{y}_2$  ergibt sich mit  $l = \|\vec{x}_0 - \vec{x}_M\|$  und  $h = \sqrt{r^2 - l^2}$ :

$$S_{1,2} : \vec{y}_{1,2} = \vec{x}_o \pm h \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|}$$

Eliminierung des nicht vorgegebenen Punktes  $P_o$  ergibt

$$\vec{y}_{1,2} = \vec{x}_M + l \frac{(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \times \vec{e}_z}{\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|} \pm h \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|} \quad \text{mit } l = \frac{((\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \times (\vec{x}_M - \vec{x}_1))_z}{\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|}$$

Aus der Definition von  $h$  ist ersichtlich, dass nur für  $l < r$  Schnittpunkte vorliegen. Nach Grundaufgabe 1 ist zu prüfen, ob sich  $S_1$  oder  $S_2$  auf  $\bar{s}$  befinden.

Die Schnittpunkte eines Kreisbogens mit einer Geraden werden durch Schneiden der Geraden mit dem Kreis ermittelt. Anschließend ist zu klären, ob die so ermittelten Punkte auf dem betrachteten Kreisbogen liegen.

**Schnitt zweier Kreise** mit gegebenen Mittelpunkten  $M_1, M_2$  und Radien  $r_1, r_2$ . Während beim Schnitt von Kreis und Gerade noch die Möglichkeit besteht, durch Lösen einer quadratischen Gleichung die Schnittpunkte aus den Gleichungen für die Objekte auszurechnen, gestaltet sich dieses Vorgehen hier ungleich schwieriger, da im allgemeinen eine Gleichung 4. Ordnung zu bearbeiten ist. Die von der konstruktiven Geometrie abgeleitete Methode führt leichter zum Ziel:

$$\vec{y}_{1,2} = \vec{x}_{M_1} + l \frac{(\vec{x}_{M_2} - \vec{x}_{M_1})}{\|\vec{x}_{M_2} - \vec{x}_{M_1}\|} \pm h \frac{(\vec{x}_{M_2} - \vec{x}_{M_1}) \times \vec{e}_z}{\|\vec{x}_{M_2} - \vec{x}_{M_1}\|}$$

mit  $c = \|\vec{x}_{M_2} - \vec{x}_{M_1}\|$ ,  $l = \frac{r_1^2 - r_2^2 + c^2}{2c}$ ,  $h = \sqrt{r_1^2 - l^2}$   
Schnittpunkte existieren falls  $(c - r_1)^2 \leq r_2^2 \wedge r_1 > r_2$  zutrifft.

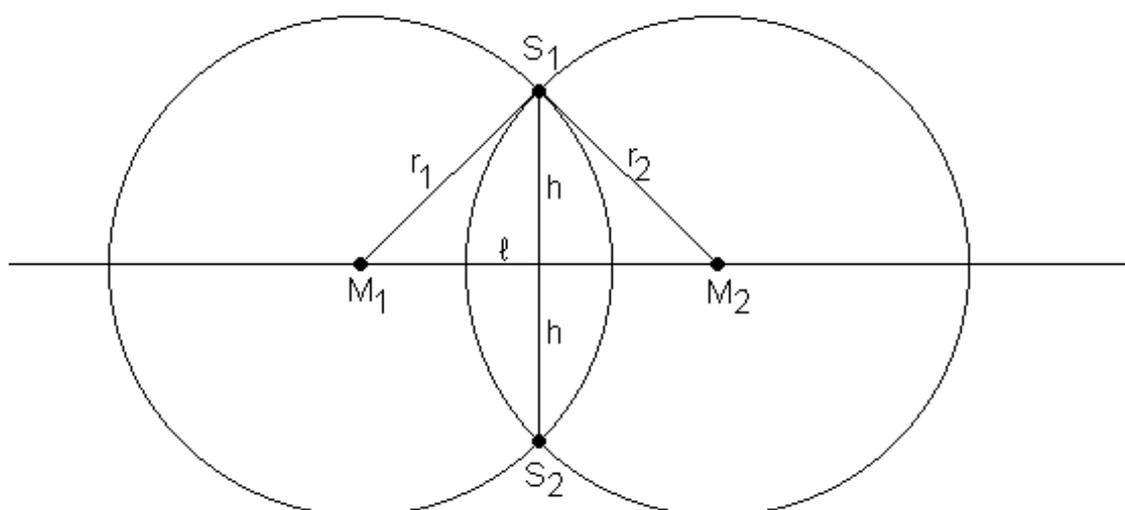


Abbildung 51: Schnitt zweier Kreise

### 6.3.5 Konvexe Hülle einer ebenen Punktmenge

DEFINITION: Die konvexe Hülle eine Punktmenge  $P_i, i = 1, 2, \dots, u$  in der Ebene ist die konvexe Menge  $M$ , die die folgenden Eigenschaften hat:

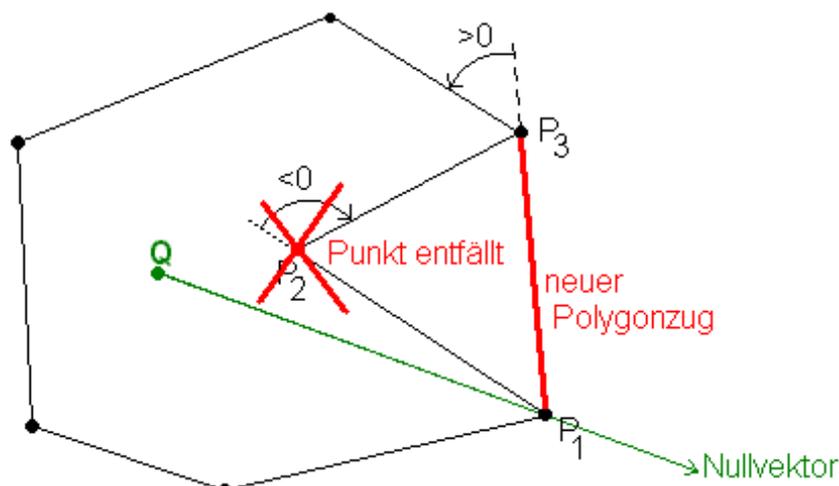
- 1 Sie enthält alle Punkte der gegebenen Punktmenge
- 2 Jede andere konvexe Menge, die die Punkte der gegebenen Punktmenge enthält, enthält auch  $M$

SATZ: Gegeben seien ein konvexes Polygon, in ihm ein innerer Punkt  $Q$ , der Ursprung eines Polarkoordinatensystems ist. Dann erscheinen aufeinanderfolgende Ecken bezüglich des Polarwinkels sortiert.

R. L. GRAHAM entwickelte 1972 daraus ein Verfahren zur Konstruktion der konvexen Hülle von  $n$  Punkten in der Ebene (*Graham - scan*):

- Man bestimme einen inneren Punkt  $Q$  der konvexen Hülle (z.B. erhält man die Koordinaten eines solchen Punktes durch komponentenweise Berechnung der arithmetischen Mittel der Koordinaten der Punkte).
- Einführung eines neuen Polarkoordinatensystems mit  $Q$  als Ursprung. Die Nullrichtung zeigt zu dem Punkt  $P_i$ , der den grössten Abstand zu  $Q$  hat. In diesem System werden die Punkte nach steigendem Polarwinkel und Punkte mit gleichem Polarwinkel nach dem Abstand von  $Q$  sortiert.
- Man trage die sortierten Punkte in eine ringförmig verknüpfte Liste ein, d.h. nach dem Listenende folgt wieder der Anfang.
- Beginne am Listenanfang und wende das folgende Verfahren an, bis der Nachfolger des bearbeiteten Listenelements der Listenanfang ist:  
wenn das Listenelement, sein Nachfolger und dessen Nachfolger eine konvexe Ecke bilden( d.h. der Nachfolger des Listenelements ist konvexer Eckpunkt des aus diesen drei Punkten gebildeten Teilpolygonzuges ), dann nimm als neues aktuelles Element den Nachfolger und teste weiter, andernfalls streiche den Nachfolger aus der Liste, gehe zum Vorgänger und prüfe erneut.

Die nunmehr in der Liste verbliebenen Punkte sind die Eckpunkte des die konvexe Hülle berandenden Polygonzuges.



## Abbildung 52: Konstruktion der konvexen Hülle mittels Graham-Scan

SATZ: Die konvexe Hülle von  $n$  Punkten in der Ebene kann mit einem Zeitaufwand wie  $O(n * \log n)$  und einem Speicherbedarf wie  $O(n)$  gefunden werden, wobei nur arithmetische und Vergleichsoperationen benutzt werden. Jedes Sortierproblem für  $n$  Elemente lässt sich zeitlinear auf ein Bildungsproblem für eine konvexe Hülle transformieren (d.h. beide Probleme haben gleiches Zeitverhalten).

Solche Aussagen sind für die Realisierung von Verfahren von großer Wichtigkeit, wenn es um die Anwendung auf umfangreiche Datenbestände geht. Gibt es für ein Verfahren Aussagen zum Laufzeitverhalten, gibt der Vergleich mit den theoretischen Werten Hinweise zu einer eventuellen Verbesserungsfähigkeit des Verfahrens. Der *Graham-Scan* stellt im Sinne des obigen Satzes ein optimales Konstruktionsverfahren für die konvexe Hülle von  $n$  Punkten in der Ebene dar.

#### 6.4 Testfragen

- Erklären Sie den Modellbegriff mit Hinblick auf die angewandte Informatik.
- Was sind linienorientierte Modelle (flächenorientierte, körperorientierte) (Eigenschaften, Vor- und Nachteile)
- Was ist ein csg-Baum?
- Was sind sweeping-Verfahren bei der Modellierung?
- Was sind Mengenalgebren? Welche für die geometrische Modellierung wichtigen Mengenalgebren kennen Sie?
- Welche Algorithmen für beschränkte geometrische Objekte der Ebene kennen Sie? Geben Sie Beispiele für Operationen mit Geraden, Polygonen, Kreisen.
- Geben Sie Beispiele, wie die Algorithmen vom verwendeten Modell abhängen.
- Wie kann die Berechnung der konvexen Hülle einer ebenen Punktmenge effizient erfolgen, welche Schlußfolgerungen für Sortierverfahren ergeben sich?