2 Koordinatensysteme

2.1 Gestalt und Radius der Erde

2.1.1 Einführung

Die reale Gestalt der Erde ist die eines unregelmäßigen Körpers und Gegenstand subtiler Untersuchungen mit Hilfe moderner Fernerkundungsverfahren. Diese Gestalt wird als **Geoid** bezeichnet.
Bei kleinmaßstäblichen Darstellungen wird die Gestalt der Erde im Allgemeinen durch eine Kugel genähert. Schon im Altertum gingen die Gelehrten von einer Kugelgestalt der Erde aus (Pythagoras , um 500 v.Chr.).

Newton unterstellte wegen der durch die Erdrotation auftretenden Zentrifugalkräfte ein an den Polen abgeplattetes Rotationsellipsoid. 1735 wurden in Frankreich Expeditionen in das heutige Ekuador und nach Lappland beschlossen, um sowohl in Äquatornähe als auch in Polnähe die Länge eines Breitengrades zu bestimmen. Die Messungen, die sich zwar später als ungenau herausstellten, lieferten den Nachweis einer Erdabplattung. Deshalb wird in einer verbesserten Näherung die Gestalt der Erde durch ein Rotationsellipsoid mit Angabe der Halbachsen a, b oder durch Angabe der großen Halbachse a und der Abplattung f mit $f = \frac{a-b}{a}$ beschrieben. Für das Erdellipsoid des „World Geodetic System 1984“ (WGS-84) werden dabei die folgenden Werte angegeben:

$$a = 6\ 378\ 137{,}0 \text{ m}$$

$$f = \frac{1}{298{,}257223563} \text{m}$$

Es wurden bzw. werden in der Geodäsie eine Vielzahl weiterer Ellipsoide als Bezugskörper benutzt. Das WGS-84 spielt insofern eine herausragende Rolle, als das „Global Positioning System“ (GPS) sich darauf stützt.

Der rechnerische Wert des Radius einer Näherungskugel wird für das Gesamtellipsoid durch Mittelwertbildung über die Halbachsenlängen berechnet, dabei ist zu beachten, die große Halbachse mit doppeltem Gewicht eingeht ($r = (a^2 b)^{1/3}$ bzw. $r = \frac{1}{3}(2a + b)$).

- Geometrisches Mittel:[14]
$$r = 6\ 371\ 001\,\text{m}$$

- Arithmetisches Mittel:
$$r = 6\ 371\ 009\,\text{m}$$

Auf Grund des geringen, bei kleinmaßstäblichen globalen Abbildungen unbedeutenden Unterschieds kann der Erdradius für orientierende Betrachtungen zu

$$r = 6\ 371\,\text{km}$$

angenommen werden. Sollen hingegen kleinere Teile der Erdoberfläche in einem größeren Maßstab dargestellt werden, kann aus den Angaben über das darzustellende Gebiet der Radius der dort gültigen „Gaußschen Kugel“ berechnet werden, die sich für dieses Gebiet lokal als günstigste Bildkugel erweist.

[14] Bei diesem Vorgehen sind die Volumina des Ellipsoids und der Kugel gleich.

2.1.2 Geoid und und Festlegung eines Referenzellipsoids

Die Frage nach der Form der Erde ist die Frage nach einem mathematischen Modell für die Gestalt. Unter Gestalt ist dabei auch nicht die Grenzfläche zwischen Wasser und Erde einerseits und der Luft andererseits zu verstehen, da diese Grenzfläche so unregelmäßig geformt ist, daß sie sich (derzeit) einer mathematischen Modellierung entzieht. Gauß äußerte sich 1828 zur Gestalt der Erde folgendermaßen:

„Was wir im geometrischen Sinn Oberfläche der Erde nennen, ist nichts anderes als diejenige Fläche, welche überall die Richtung der Schwere senkrecht schneidet, und von der die Oberfläche des Meeres einen Teil ausmacht.“

Weiter stellt er Einflußfaktoren auf die Gestalt der Erde dar:

„Die Richtung der Schwere an jedem Punkt wird aber durch die Gestalt des festen Teils der Erde und seine ungleiche Dichtigkeit bestimmt und an der äußeren Rinde der Erde, von der allein wir etwas wissen, zeigt sich diese Gestalt und Dichtigkeit als höchst unregelmäßig; die Unregelmäßigkeit der Dichtigkeit mag sich leicht noch ziemlich tief unter die äußere Rinde erstrecken und entzieht sich ganz unseren Berechnungen, zu welchen fast alle Daten fehlen. Die geometrische Oberfläche ist das Produkt der Gesamtwirkung dieser ungleich verteilten Elemente und anstatt vorkommende unzweideutige Beweise der Unregelmäßigkeit befremdend zu finden, scheint es eher zu bewundern, daß sie nicht noch größer ist.“

Der erste Teil der Gaußschen Aussage ist die Definition der Gestalt der Erde. Anzumerken bleibt, daß auch die Verteilung des Wassers auf der Erde, selbst ein Ergebnis des Gravitationsfeldes, einen Beitrag zu diesem Feld leistet. Zur Motivation der Definition sei daran erinnert, daß mittels Libellen die Ausrichtung der Stehachse der Vermessungsinstrumente parallel zum Schwerefeld und damit lokal orthogonal zur Niveaufläche erfolgt.

J.B. Listing prägte 1872 für die obengenannte Niveaufläche den Namen *Geoid*. Ohne in die Details einer modernen mathematischen Formulierung des Problems, eine solche Fläche zu finden, einzudringen, muß festgestellt werden, daß es selbst unter stark vereinfachenden Annahmen zu einer Klasse äußerst schwierig zu behandelnder Probleme der mathematischen Analysis gehört und in der hier benötigten Allgemeinheit bisher nicht gelöst wurde. Die Abweichungen zwischen dem Geoid und geeignet gewählten Ellipsoiden sind gering, sie werden bei Bedarf als Höhenfeld über dem Ellipsoid beschrieben und können in Rechnungen beachtet werden. Somit ist das Ellipsoid als Modell für die Gestalt der Erde gerechtfertigt und auch in praktischen Vermessungsfragen zu nutzen. Als Beispiel sei hier das Referenzellipsoid WGS-84 genannt. Das Geoid weicht davon um +70/-100m ab. Das dazugehörige Höhenfeld wurde im Internet Höhenfeld über einem Referenzellipsoid[15] zugänglich.

Aus praktischer Sicht stellt sich damit die Frage, ein Ellipsoid zu finden, welches die Abweichungen zwischen Ellipsoid und Geoid (auch Geoidundulation genannt) minimiert. Dafür sind mehrere Verfahren bekannt:

- Die geometrische Methode:

FW39 Finsterwalder, R.: *Photogrammetrie*,
De Gruyter, Berlin, 1939, (UB:ZW Math. Geo_2-75) Sie beruht auf lokalen Messungen

[15] http://www.utexas.edu/depts/grg/gcraft/notes/datum/datum.html

der Lotabweichungen und Variation der Lageparameter (Mittelpunkt und Richtung der kleinen Halbachse) sowie der Größe und Gestalt der Ellipse mit dem Ziel, die Geoidundulation zu minimieren. Als Resultat ergibt sich ein lokal bestanschließendes Ellipsoid. Seine kleine Halbachse verläuft *etwa parallel* zur Drehachse der Erde. Die heute in der Landvermessung meist verwendeten Ellipsoide beruhen zu einem großen Teil auf Ellipsoidbestimmungen nach dieser Methode, die Ende des 19. / Anfang des 20. Jahrhunderts durchgeführt wurden. Es wird damit auch verständlich, daß in verschiedenen Teilen der Erde, ja schon Europas, verschiedene Ellipsoide Verwendung finden (siehe 21).

- Die gravimetrische Methode:

  Aus Schweremessungen auf der gesamten Erde werden die Parameter so bestimmt, daß die Schwereanomalien minimiert werden. Das Ergebnis ist stets ein mittleres Erdellipsoid, dessen Mittelpunkt mit dem Schwerpunkt der Erde zusammenfällt.

Die bisher genannten Verfahren sind klassisch und erdgebunden. Durch Satellitenbenutzung wurden weitere Verfahren ermöglicht:

- Die geometrische Methode:

  Der Satellit dient als hochfliegender Meßpunkt, der gleichzeitig von mehreren Meßpunkten aus angezielt wird. Dadurch können Meßreihen über Ozeane hinweg miteinander verbunden werden.

- Die dynamische Methode:

  Der Satellit dient als Sensor im Schwerefeld der Erde. Aus Abweichungen seiner tatsächlichen Flugbahn von der vorherberechneten wird auf das Gravitationsfeld der Erde geschlossen.

2.1.3 Referenzsysteme, Geodätisches Datum

Koordinatensysteme und darin gegebene Koordinaten von Punkten sind erst dann geodätisch nutzbar, wenn feststeht, wie das Koordinatensystem mit dem Erdkörper verbunden ist. Dazu wird festgelegt, auf welche Bezugsfläche (z.B. auf welches Ellipsoid) sich die Werte beziehen und welche Bedeutung sie haben.

Definition 2.1 (M. Bauer) *Ein* **geodätisches Referenzsystem** *ist die Summe der theoretischen Vereinbarungen zur Konkretisierung eines Koordinatensystems für geodätische Zwecke.*

In der klassischen Geodäsie werden die vermessenen Punkte durch die Meßwerte zu Netzen verbunden. Die Meßwerte (Abstand, Richtung) beschreiben zunächst nur die relative Lage eines Punktes im Netz.

Die Verabredungen zur Anordnung eines geodätischen Netzes in einem gewählten Koordinatensystem wird *Datumsfestsetzung* genannt. Auf Grund von Referenzsystem und Datumsfestsetzung können für auf dem Erdkörper vermarkte Punkte Lagekoordinaten und Höhen berechnet werden. Auf dieses Referenznetz von Punkten beziehen sich dann weitere Vermessungsarbeiten. Die folgende Tabelle zeigt einige Datumsfestsetzungen in Europa:

	Lagevermessung		Höhenvermessung	
Land	**Ellipsoid**	**Lagerungspunkt**	**Höhensystem**	**Datumspunkt**
Frankreich	Clarke 1880	Pantheon	Normalhöhe	Marseille
Belgien	Hayford 1924	Ukkel	orthometrisch	Ostende
Niederlande	Bessel 1841	Amersfoort	orthometrisch	Amsterdam
Polen	Krassowski 1942	Pulkowo	Normalhöhe	Kronstadt
Österreich	Bessel 1841	Hermanskogel	orthometrisch	Triest
Schweiz	Bessel 1841	Bern	orthometrisch	Marseille
Italien	Hayford 1924	Rom	orthometrisch	Genua; Cataina
Spanien	Strure 1860	Madrid	orthometrisch	Alicante
Portugal	Bessel 1841	Lissabon	orthometrisch	Cacais
Deutschland	Bessel 1841	Rauenberg	normalorthometrisch	Amsterdam
Ostdeutschland	Krassowski 1942	Pulkowo	Normalhöhe	Kronstadt

Die Tabelle ist [2] entnommen. Mit der Benutzung verschiedener Systeme entsteht insbesondere in der Grenzregion zweier Festsetzungen das Problem, Koordinaten aus einem System in ein anderes umzurechnen. Das betrifft einmal die Lagemessung und insbesondere die Höhenmessung, wo nicht nur unterschiedliche Datumspunkte (Pegel), sondern auch unterschiedliche Verfahren zur Umrechung gemessener Höhendifferenzen zu beachten sind. In Deutschland sind wegen der politischen Entwicklung nach 1945 und nach der Wiedervereinigung 1990 zwei unterschiedliche Referenzsysteme und Referenznetze vorhanden. In der DDR wurde eine Neubestimmung der Koordinaten unter Benutzung des Systems der damaligen Sowjetunion durchgefhrt. Nach 1990 erfolgt ein schrittweiser Übergang zum deutschen System.

Eine zunehmende Globalisierung, z.B. durch GPS, bedingt auch länderübergreifende Harmonisierungen im Bereich der geographischen Koordinaten. Das NAVSTAR-GPS stützt sich auf das Referenzsystem WGS-84, das russische GLONASS-System auf „Parametri Zemli 1990“. An der Festlegung eines globalen Referenzellipsoids wird gearbeitet.

2.2 Geographische Koordinaten

Geographische Koordinaten sind die auf der Erde gemessenen Koordinaten *geographische Länge*, *geographische Breite* und die *Höhe*.

2.2.1 Definition und Messung

Im folgenden wird unterstellt, daß die Gestalt der Erde durch ein Rotationsellipsoid beschrieben wird. Die Rotationsachse schneidet das Ellipsoid in zwei Punkten, die als *Nordpol* und *Südpol* bezeichnet werden.

Geographische Länge: Jede auf dem Ellipsoid liegende Halbellipse mit der kleinen Halbachse Nordpol-Südpol bildet einen *Meridian* . Ein Element dieser Schar der Meridiane wird als *Nullmeridian* ausgezeichnet. Ein beliebiger Meridian wird durch den Winkel zwischen ihm und dem Nullmeridian beschrieben. Dieser Winkel ist als Winkel zwischen den zugehörigen Halbtangenten in den Schnittpunkten erklärt.

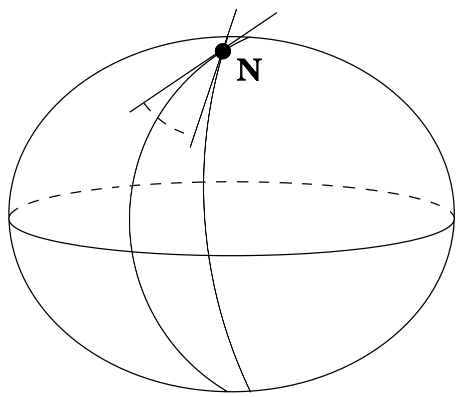

Abbildung 5: Bestimmung der Länge

Der Winkel ist positiv zu nehmen, wenn am Nordpol der Übergang von der Tangente an den Nullmeridian zur Tangente an den betrachteten Meridian bei Betrachtung des Nordpols des Ellipsoids von außen in mathematisch positiver Richtung erfolgt, andernfalls negativ. Die Maßzahl des Winkels beschreibt die *geographische Länge*. Bei *östlicher* Länge ist der Winkel positiv, bei *westlicher* negativ.

Geographische Breite: Im folgenden werde zunächst der Spezialfall betrachtet, daß das Ellipsoid eine Kugel sei. Die Definition der Meridiane ist hier ein Spezialfall der obigen. Eine zweite Kurvenschar auf der Kugel wird mittels einer Schar von Kreiskegelmänteln mit der Spitze im Kugelmittelpunkt erzeugt. Die Kegelachse enthalte die Strecke Kugelmittelpunkt-Nordpol.

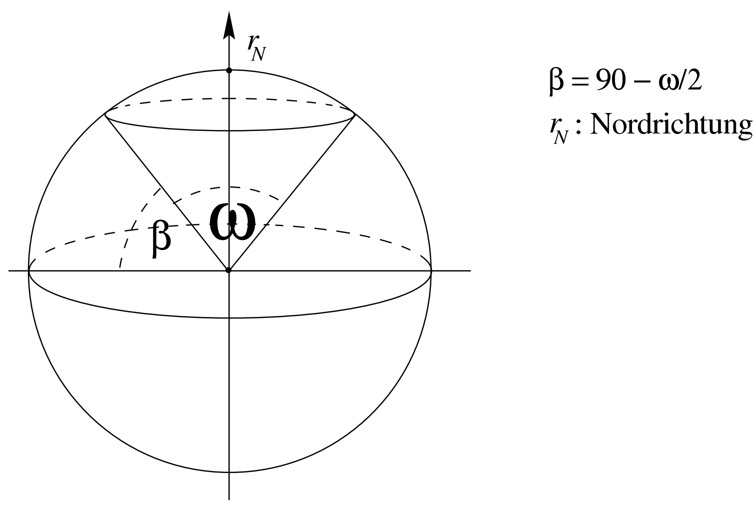

Abbildung 6: Breite auf der Kugel

Diese Kegelmäntel schneiden aus der Kugelfläche Kreise aus. Auf jedem dieser Kreise liegen p.d. die Orte gleicher Breite. Die Breite wird durch den Komplementärwinkel des halben Kegelöffnungswinkels ω angegeben. Ist diese Angabe positiv, spricht man von *nördlicher Breite*, ist sie negativ, von *südlicher Breite*. Der Kreis mit der Breite Null heißt *Äquator*. Sein Radius ist gleich dem Kugelradius.

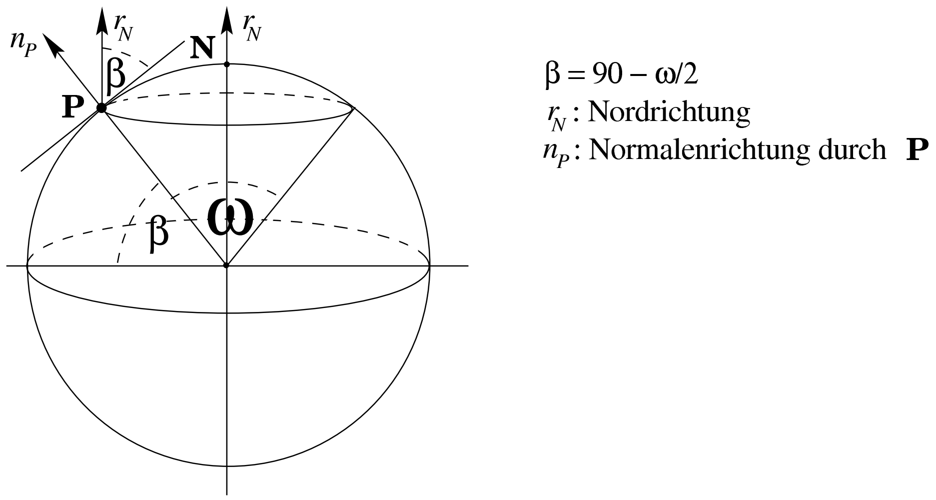

Abbildung 7: Breite auf der Kugel

Offensichtlich ist die Breite eines Punktes P auf einer Kugel gleich dem Komplement des Winkels zwischen (äußerer) Kugelnormalen n_P in P und der Nordrichtung r_N, die durch den Süd-Norddurchlauf entlang der Achse gegeben wird. Die Normalenrichtung der Kugel entspricht bei homogener Masseverteilung in der Kugel bis auf das Vorzeichen der durch die Gravitation bedingten Lotrichtung, welche durch den Kugelmittelpunkt verläuft. Diese Richtung ist auch in der Praxis verfügbar, indem die Stehachse eines Theodolithen mit Hilfe von Libellen in Richtung Erdanziehungskraft gestellt wird.

Breite auf dem Ellipsoid: Hier muß zwischen geographischer und geozentrischer Breite unterschieden werden Die *geographische Breite* eines Punktes P auf einem Ellipsoid wird definiert durch den Komplementärwinkel des Winkels zwischen (äußerer) Ellipsoidnormalen n_P in P und der Nordrichtung r_N, die durch den Süd-Norddurchlauf durch die Achse gegeben wird.

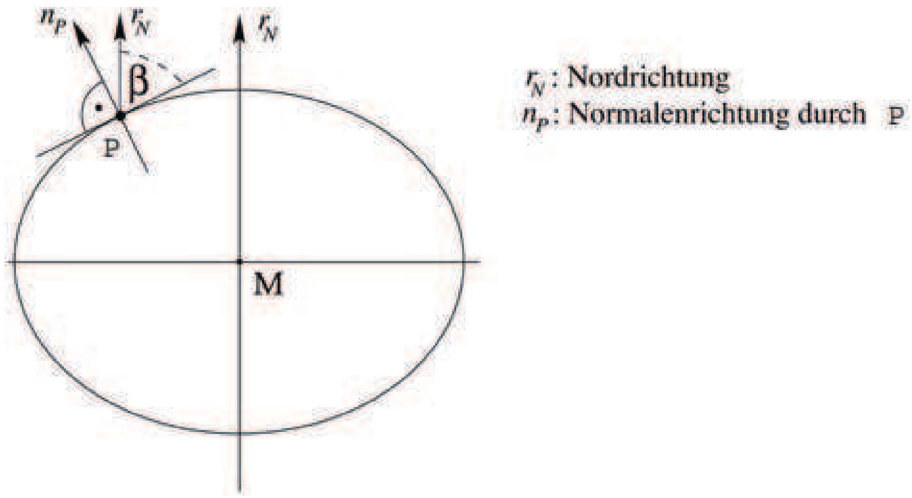

Abbildung 8: Breite auf dem Ellipsoid

Durch die Kegelschar wird wie oben die *geozentrische Breite* definiert.(Abb.7)

Mit Ausnahme der Pole und des Äquators, wo Gleichheit eintritt, ist die geographische Breite betragsmäßig größer als die geozentrische Breite. Die Umrechnung erfordert die

Kenntnis der Abplattung. Dabei gilt folgender Zusammenhang:

$$\tan b_z = (1-f)^2 \tan b_g \quad ,$$

hierbei ist b_g die geographische Breite, b_z die geozentrische Breite und f die Abplattung. Die Differenz der beiden Breiten kann in eine alternierende Reihe entwickelt werden:

$$b_g - b_z = m \sin(2b_g) - \frac{1}{2}m^2 \sin(4b_g) + \frac{1}{3}m^3 \sin(6b_g) - \ldots$$

wobei

$$m = \frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

und a die große Halbachse, b die kleine Halbachse des zu Grunde liegenden Referenzellipsoids ist. Offensichtlich hat die Differenz bei der geographischen Breite von 45°ein Maximum (nämlich 11'6).

Aus der Kenntnis der (geographischen) Breite eines Beobachtungsortes P auf der Oberfläche des Referenzellipsoids kann mittels der geozentrischen Breite auf den Abstand des Punktes P vom Mittelpunkt M des Ellipsoids geschlossen werden: (Abb. 8)

$$\texttt{distanz}(P, M) = a \cdot \sqrt{\frac{\cos b_g}{\cos b_z \cdot \cos(b_g - b_z)}}$$

Höhe: Die *Höhe*([16]) eines Punktes P ist als Länge des Lotes von P auf den Referenzkörper definiert. Hat ein Punkt eine Höhe ungleich Null, sind seine anderen geographischen Koordinaten die seines Lotfußpunktes.
Messung: Die Messung geographischer Koordinaten beruht auf der Messung astronomischer Werte. Sie werden deshalb auch *astronomische Koordinaten* genannt. Die Messung jedes Längenunterschieds wird auf eine Messung einer Ortszeitdifferenz zurückgeführt, wobei 15° einer Stunde entsprechen. Die Breite wird aus der Messung der Höhe von Sternen ermittelt:

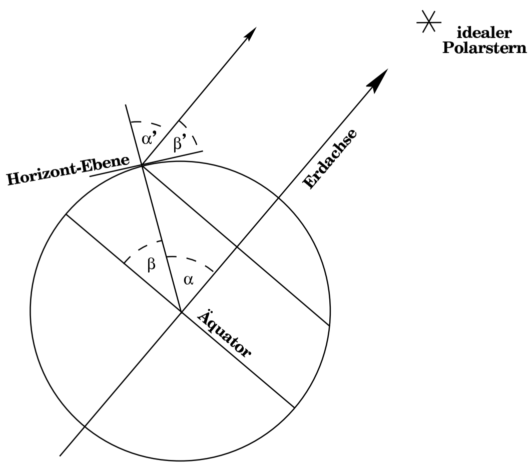

Abbildung 9: Bestimmung der Breite

Hätte die Erde einen idealen Polarstern, d.h. einen Fixstern der genau auf der Verlängerung der Erdachse in die unendlich große Himmelskugel läge, könnte die Breite einfach als Höhe

[16]statt des Begriffs „Höhe"findet sich in der Literatur auch „geographische Höhe"

dieses Sterns über dem Horizont bestimmt werden. Mit Hilfe eines beliebigen zirkumpolaren Sterns läßt sich die geographische Breite eines Beobachtungsortes jedoch als arithmetisches Mittel der Höhen des Sterns im oberen und im unteren Kulminationspunkt bestimmen.

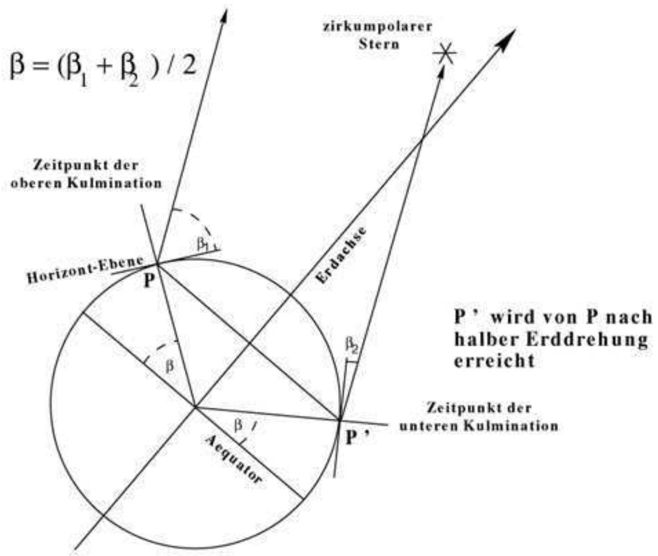

Abbildung 10: Bestimmung der Breite

2.2.2 Abhängigkeit von der Bezugsfläche

Wie aus den Definitionen ersichtlich ist, hängen die geographische Breite und die Höhe bei ellipsoidalen Bezugskörpern von der Wahl des Körpers ab. Zu beachten ist ferner, daß die Normalenrichtung bei praktischen Messungen durch die Lotrichtung bestimmt wird und somit inhomogene Dichteverteilungen im Erdinnern als auch nahegelegene Bergmassive diese Richtung beeinflussen könnten.
Folgerung: Werden Daten, die auf einen Referenzkörper bezogen sind, in einem anderen System interpretiert, kann das zu Lagefehlern in drei Dimensionen bis zu einem Kilometer führen. Deshalb müssen Formeln für die Umrechnung[17] von Koordinaten bereitgestellt werden. Ein Beispiel der Fehlerentstehung zeigt Abbildung 11. Eine graphische Darstellung der Lagefehler[18] gibt P. Dana.

[17] http://www.utexas.edu/depts/grg/gcraft/notes/datum/datum.html
[18] http://www.utexas.edu/depts/grg/gcraft/notes/gif/shift.gif

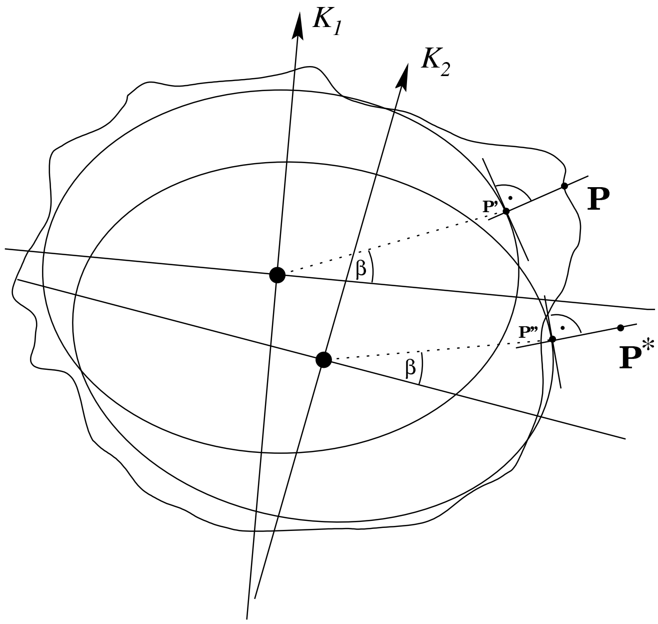

Abbildung 11: Fehler bei der Interpretation

Koordinaten von P in K_1 gemessen, aber in K_2 interpretiert.

2.2.3 Umrechnung

Da eine Vielzahl von geodätischen Koordinatensystemen in Benutzung[19] sind oder waren, gibt es die Notwendigkeit der Koordinatenumrechnung[20] .

Die Umrechnung erfolgt prinzipiell nach folgendem Ablauf: (siehe Abb. 12)
Gegeben sei der Punkt P durch seine Koordinaten Länge, Breite und Höhe im Koordinatensystem K_1 auf dem Ellipsoid e_1, wobei Länge und Breite P' auf e_1 bestimmen.

1. Berechnung der Raumkoordinaten von P im Koordinatensystem K_1, wobei das Ellipsoid e_1 einbezogen wird.
2. Übergang zum Koordinatensystem K_2, d.h. Berechnung der Raumkoordinaten von P im System K_2,
   - welches gegenüber K_1 im Ursprung verschoben ist,
   - dessen Achsen gegenüber K_1 im Raum gedreht sind.
3. Berechnung der geographischen Koordinaten von P unter Beachtung des Referenzellipsoids e_2 (d.h. Länge und Breite vonP'').

[19]http://www.utexas.edu/depts/grg/gcraft/notes/datum/edlist.html
[20]http://www.utexas.edu/depts/grg/gcraft/notes/datum/datum.html

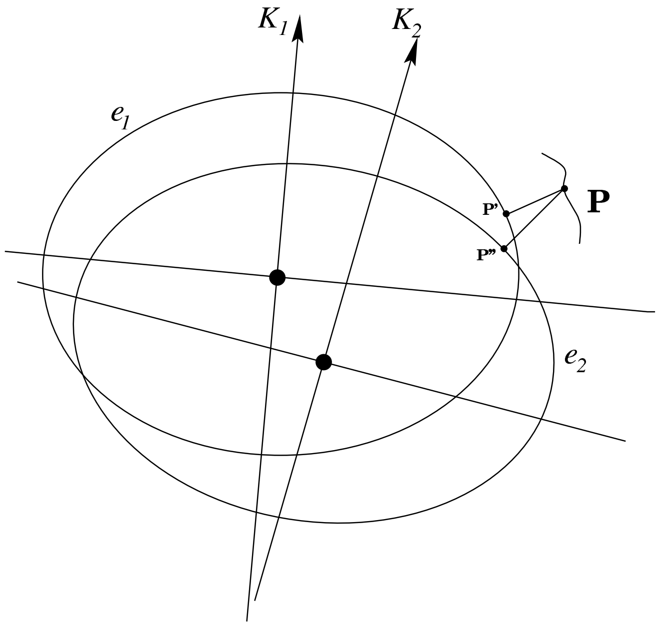

Abbildung 12: Ablauf einer Umrechnung

2.3 Testfragen

- Was ist das Geoid ?
- Was ist ein Referenzellipsoid, warum ist es nicht eindeutig festgelegt ?
- Erklären Sie die Begriffe geografische Länge und Breite.
- Was beinhaltet die Datumsfestsetzung?
- Warum muß zwischen verschiedenen Refenzsystemen umgerechnet werden, wie geht das?
- Welche Bezugssysteme sind in Deutschland in Gebrauch?