Universität Leipzig
Fakultät für Mathematik und Informatik
Institut für Informatik
Abteilung Datenbanken
Dr. B. Uhrich

Ausgabe: 16.10.2026
Besprechung: 28.10.2026

Physikbasiertes Maschinelles Lernen

Wintersemester 2026/27

—

Übungsblatt 1

Aufgabe 1: Vom Fallgesetz zum Zustandsmodell

Ein Körper mit Masse $m = 1\,\mathrm{kg}$ fällt aus $20\,\mathrm{m}$ Höhe. Neben der Gewichtskraft wirkt linearer Luftwiderstand $F_R = -\gamma z'$ mit $\gamma = 2\,\mathrm{kg/s}$. Verwenden Sie $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Zu Beginn ruht der Körper. Betrachten Sie nur die Bewegung bis zum Aufprall.

(a) Leiten Sie aus Newtons zweitem Gesetz das Anfangswertproblem für $z(t)$ her. Geben Sie Ordnung und benötigte Anfangsbedingungen an.

(b) Führen Sie $X = (z, v)^\top$ ein und schreiben Sie das Modell als System erster Ordnung sowie in der Form $X' = AX + b$.

(c) Klassifizieren Sie das System in autonom/nichtautonom, linear/nichtlinear sowie homogen/inhomogen.

(d) Bestimmen Sie die stationäre Geschwindigkeit des Geschwindigkeitsmodells. Ist der zugehörige Zustand des vollständigen Systems ein Gleichgewicht? Begründen Sie.

Aufgabe 2: Schadstoffbelastung und natürlicher Abbau in einem See

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$x'(t) + 4x(t) = e^t \quad mit \quad x(0) = 3$$

welches die Schadstoffkonzentration $x(t)$ in einem See beschreibt.

(a) Bestimmen Sie zunächst die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung 1. Ordnung.

(b) Lösen Sie das gegebene Anfangswertproblem.

(c) Untersuchen Sie das Langzeitverhalten für $\lim_{t\to\infty}$.

Aufgabe 3: Gedämpfter harmonischer Oszillator mit äußerer Anregung

Ein Masse-Feder-Dämpfer-System wird durch eine periodische äußere Kraft angeregt. Die Auslenkung $x(t)$ aus der unbelasteten Ruhelage erfüllt

$$x''(t) + 2x'(t) + 5x(t) = cos(t)$$

Zu Beginn beträgt die Auslenkung $x(0) = 1{,}2$ und die Geschwindigkeit $x'(0) = 1{,}1$.

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $x_a(t)$.

(b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $x_p(t)$.

(c) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems.

Aufgabe 4: Expliziter und impliziter Euler bei schnellem Zerfall

Die Konzentration eines Stoffes erfüllt

$$x' = -10x, \qquad x(0) = 1.$$

(a) Berechnen Sie mit $h = 0{,}25$ mithilfe des expliziten und des impliziten Euler-Verfahrens x_1 sowie x_2. Vergleichen Sie mit $x(0{,}5) = e^{-5}$ hinsichtlich Fehler, Vorzeichen und Abklingverhalten.

(b) Für welche Schrittweiten $h > 0$ klingt die numerische Lösung des expliziten Euler-Verfahrens gegen null ab, sodass das Verfahren für dieses Problem asymptotisch stabil ist.

(c) Ist eine stabil berechnete Näherung automatisch genau? Begründen Sie am impliziten Euler- Verfahren für große Schrittweiten.

Aufgabe 5: Allgemeines Runge-Kutta Verfahren und Butcher Tableau

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem $x' = t - x$, $x(0) = 1$.

(a) Gegeben ist das Tableau

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}.$$

Schreiben Sie die Stufen und die Aktualisierung auf. Ist das Verfahren explizit? Prüfen Sie $\sum_i b_i = 1$.

(b) Stellen Sie das Butcher-Tableau des klassischen vierstufigen RK4-Verfahrens auf. Erläutern Sie kurz die Bedeutung von a_{ij}, b_i und c_i.

(c) Berechnen Sie mit RK4 einen Schritt von $t_0 = 0$ nach $t_1 = 0{,}2$. Geben Sie alle vier Stufen als *Steigungen* $k_i = f(t_0 + c_i h, \ldots)$ sowie x_1 an.

(d) Vergleichen Sie die berechnete Lösung hinsichtlich lokalem Fehler mit der exakten Lösung $x(t) = t - 1 + 2e^{-t}$.

Aufgabe 6: Runge–Kutta für einen gedämpften Oszillator

Implementieren Sie das explizite sowie das implizite Euler-Verfahren als Vertreter 1. Ordnung für das allgemeine Runge-Kutta Verfahren in Python mithilfe von NumPy. Untersuchen Sie das System

$$X' = f(t, X) = \begin{pmatrix} v \\ -2v - 5x \end{pmatrix}, \qquad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 5, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}.$$

(a) Simulieren Sie beide Verfahren bis $T = 5$ mit $h \in \{0{,}2; 0{,}1; 0{,}05; 0{,}025\}$.

(b) Plotten Sie für $h = 0{,}2$ und $h = 0{,}025$ die Lösung der beiden Verfahren zusammen mit der analytischen Lösung sowie das Phasenportrait $(x(t), v(t))$. Verwenden Sie als analytische Lösung

$$x(t) = e^{-t}\left(\cos(2t) + \tfrac{1}{2}\sin(2t)\right), \qquad v(t) = -\tfrac{5}{2}e^{-t}\sin(2t).$$