Universität Leipzig
Fakultät für Mathematik und Informatik
Institut für Informatik
Abteilung Datenbanken
Dr. B. Uhrich

Ausgabe: 30.10.2026
Besprechung: 11.11.2026

Physikbasiertes Maschinelles Lernen

Wintersemester 2026/27

—

Übungsblatt 2

Aufgabe 1: Vom Zustand zum räumlichen Feld

Gegeben sei das Feld

$$u(t, x, y) = e^{-2t} \sin(\pi x) \cos(\pi y), \qquad (x, y) \in (0, 1)^2.$$

(a) Erläutern Sie den Unterschied zwischen einer ODE für einen Zustand $X(t)$ und einer PDE für ein Feld $u(t, x, y)$. Welche Information enthält das Feld zusätzlich?

(b) Berechnen Sie u_t, u_x, u_y, den räumlichen Gradienten ∇u und den räumlichen Laplace-Operator Δu.

(c) Bestimmen Sie $\alpha > 0$ so, dass $u_t = \alpha \Delta u$ gilt.

(d) Bestimmen Sie das Anfangsprofil $u(0, x, y)$. Zeigen Sie, dass auf $x = 0$ und $x = 1$ homogene Dirichlet-Bedingungen und auf $y = 0$ und $y = 1$ homogene Neumann-Bedingungen erfüllt sind.

Aufgabe 2: Ordnung, Linearität und PDE-Typ

Betrachten Sie folgende Gleichungen für $u(t, x)$ bzw. $w(x, y)$:

$$\begin{aligned}
&\text{(I)} && u_t = 0{,}2 u_{xx}, && \text{(II)} && u_t + u\, u_x = 0,\\
&\text{(III)} && -w_{xx} - w_{yy} = 1, && \text{(IV)} && u_{tt} - 4u_{xx} = 0,\\
&\text{(V)} && u_t = (u_{xx})^2. &&
\end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie jeweils die Ordnung. Welche Gleichungen sind linear, welche nichtlinear? Welche nichtlineare Gleichung ist quasilinear?

(b) Unterscheiden Sie bei den *linearen* Gleichungen zwischen homogener und inhomogener PDE. Bezieht sich diese Einteilung auf die Randbedingungen?

(c) Ordnen Sie (I), (III) und (IV) den Typen parabolisch, elliptisch bzw. hyperbolisch zu. Begründen Sie über den Hauptteil. Ordnen Sie (II) als Transportgleichung erster Ordnung ein.

Aufgabe 3: Transport, Diffusion und Quellterm

Die Schadstoffkonzentration in einem Kanal werde beschrieben durch

$$c_t + vc_x = Dc_{xx} + q(t,x), \qquad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

mit konstanten $v > 0$ und $D > 0$.

(a) Erläutern Sie die Bedeutung von c_t, vc_x, Dc_{xx} und q. Geben Sie die Einheiten von v, D und q an, wenn x in Metern, t in Sekunden und c in $\mathrm{kg/m^3}$ gemessen werden.

(b) Formulieren Sie ein vollständiges Anfangs-Randwertproblem für ein anfangs unbelastetes Kanalstück mit $c(t,0) = c_{\mathrm{in}}(t)$ und $c(t,L) = 0$. Welche Bedingung an $c_{\mathrm{in}}(0)$ sichert die Verträglichkeit am linken Eckpunkt?

(c) Setzen Sie nun $D = 0$ und $q = 0$. In welche Richtung wandert ein Anfangsprofil bei $c_t + vc_x = 0$? Überprüfen Sie den Ansatz $c(t,x) = c_0(x - vt)$ durch Einsetzen.

(d) An welchem Rand ist im Fall aus c) eine Konzentration vorzugeben? Warum kann am anderen Rand im Allgemeinen kein zusätzlicher beliebiger Konzentrationswert vorgeschrieben werden? Vergleichen Sie mit $D > 0$.

Aufgabe 4: Finite Differenzen für die Wärmeleitung

Ein homogener Stab der Länge $L = 1\,\mathrm{m}$ besitzt die Temperaturleitfähigkeit $\alpha = 0{,}1\,\mathrm{m^2/s}$. Seine Enden werden auf $0\,^\circ\mathrm{C}$ gehalten. Ohne Wärmequellen gilt

$$u_t = \alpha u_{xx}, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0, \qquad u(t,0) = u(t,L) = 0,$$

mit $u(0,x) = 100\sin(\pi x/L)\,^\circ\mathrm{C}$.

1. Geben Sie die exakte Lösung an und überprüfen Sie diese durch Einsetzen. Verwenden Sie dazu den Ansatz $u(t,x) = a(t)\sin(\pi x)$.
2. Wählen Sie $x_i = ih$ mit $h = L/4$ und $t_n = n\Delta t$ mit $\Delta t = 0{,}25\,\mathrm{s}$. Leiten Sie mit explizitem Euler in der Zeit und zentralen Differenzen im Raum das Update für $U_i^n \approx u(t_n, x_i)$ her. Stellen Sie es für die drei inneren Werte in Matrixform dar.

3. Berechnen Sie die Anfangswerte sowie die ersten beiden Zeitschritte von Hand. Vergleichen Sie bei $t = 0{,}5\,\mathrm{s}$ die drei inneren Werte mit der exakten Lösung. Runden Sie erst die Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.

Aufgabe 5: Schwache Formulierung und Galerkin-FEM

Gegeben sei das stationäre Poisson-Problem

$$-u''(x) = 2x, \qquad 0 < x < 1, \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

Die exakte Lösung lautet $u(x) = (x - x^3)/3$.

(a) Multiplizieren Sie $-u'' = 2x$ mit einer Testfunktion φ, für die $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ gilt. Integrieren Sie und führen Sie eine partielle Integration durch. Geben Sie die schwache Formulierung an.

(b) Wählen Sie zunächst den Galerkin-Ansatz $u_G(x) = a\psi(x)$ mit $\psi(x) = x(1-x)$ und derselben Testfunktion. Bestimmen Sie a aus der schwachen Formulierung. Vergleichen Sie mit der exakten Lösung.

(c) Wählen Sie nun die stückweise lineare Hutfunktion

$$\phi(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1/2, \\ 2(1-x), & 1/2 < x \le 1, \end{cases} \qquad u_h(x) = b\phi(x).$$

Bestimmen Sie b mit dem Galerkin-Verfahren. Vergleichen Sie u_h und u bei $x = 1/4$ und $x = 1/2$.

(d) Warum ist der Ansatz aus c) ein Finite-Elemente-Ansatz? Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen Galerkin-Verfahren, lokalen Basisfunktionen und FEM.

Aufgabe 6: Implementierungsaufgabe Finite Differenzen Methode

Lösen Sie das Problem aus Aufgabe 4 für $\alpha = 0{,}1$ bis $T = 0{,}5$. Implementieren Sie die finite-Differenzen Methode.

(a) Diskretisieren Sie mithilfe finiter-Differenzen die Wärmeleitungsgleichung und implementieren Sie die Lösungsmethode. Verwenden Sie N Teilintervalle, $h = 1/N$ und $x_i = ih$. Initialisieren Sie $U_i^0 = \sin(\pi x_i)$ und setzen Sie beide Randwerte in jedem Zeitschritt auf null. Berechnen Sie alle neuen inneren Werte aus dem alten Zeitniveau.

(b) Rechnen Sie für $N = 20, 40, 80$. Wählen Sie zunächst $\Delta t_* = 0{,}4h^2/\alpha$, dann $M = \lceil T/\Delta t_* \rceil$ und $\Delta t = T/M$. Stellen Sie numerische und exakte Profile bei $t = 0$, $T/2$ und T dar; wählen Sie hierfür bei Bedarf ein gerades M.