1. Einführung in Differentialgleichungen



- Gewöhnliche Differentialgleichungen
- Dynamische Systeme
- Numerische Approximation der Lösung einer ODE
- Partielle Differentialgleichungen
- Numerische Approximationsschemas für PDEs

1.1. Gewöhnliche Differentialgleichungen



Wie lassen sich physikalische Gesetzmäßigkeiten mathematisch in ein berechenbares Modell übertragen?

- Differentialgleichungen sind die Sprache der Physik

Was ist eine Differentialgleichung?



Eine Differentialgleichung (DGL) ist eine Gleichung, die eine Funktion und deren Ableitungen als unbekannte Größe enthält.

$$x: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$$
$$x'(t) = f\big(t, x(t)\big)$$
$$x(0) = x_0$$

- Ziel: die Funktion x(t) bestimmen – analytisch oder numerisch
- Eindeutige Lösung nur möglich durch Anfangsbedingung
- DGL + Anfangsbedingung = Anfangswertproblem

Was ist eine Differentialgleichung?



Eine Differentialgleichung (DGL) ist eine Gleichung, die eine Funktion und deren Ableitungen als unbekannte Größe enthält.

$$x: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$$
$$x'(t) = f\big(t, x(t)\big)$$
$$x(0) = x_0$$

- Ein kontinuierliches System
- Abhängig von der Zeit t und dem Zustand x(t)

Was ist eine Differentialgleichung?



Eine Differentialgleichung (DGL) ist eine Gleichung, die eine Funktion und deren Ableitungen als unbekannte Größe enthält.

$$x: \mathbb{N} \quad \rightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x'(k+1) = g_d(k, x)$$
$$x(0) = x_0$$

- Ein diskretes System
- Die gesuchte Lösung ist jetzt nur noch an diskreten Zeitpunkten definiert $k \in \mathbb{N}$

Erstes Beispiel



$$x'(t) = x(t)$$

- Triviale Lösung: $x(t) = Ce^t$
- Anfangsbedingung: $x(0) = 1$
- Eindeutige Lösung: $x(t) = e^t$

- Allgemeiner gilt: $x'(t) = \lambda x(t) \Longrightarrow x(t) = Ce^{\lambda t}$
- Anfangsbedingung: $x(0) = 10$
- Eindeutige Lösung: $x(t) = 10e^{\lambda t}$

Von der Physik zur ODE



Newtons 2. Gesetz für einen Apfel der Masse m, der in einem Gravitationsfeld g mit einem Luftwiderstandsparameter λ fällt.

$$F = ma$$
$$a = x''(t)$$
$$mx''(t) = F$$
$$mx''(t) = -mg - \lambda x'(t)\ Dgl\ 2.Ordnung$$

- Die höchste vorkommende Ableitung in einer Dgl. bestimmt die Ordnung

Von der Physik zur ODE



Wie sieht das dynamische System aus, welches die Trajektorie des Apfels repräsentiert?

$$x_1(t) = x(t)\ Position$$
$$x_2(t) = x'(t)\ Geschwindigkeit$$
$$\rightarrow x_1'(t) = x_2(t)$$
$$\rightarrow \mathrm{x}_2'(\mathrm{t}) = \mathrm{x}''(\mathrm{t}) = -\mathrm{g} - \frac{\lambda}{m} x_2(t)$$

Von der Physik zur ODE



Wie sieht das dynamische System aus, welches die Trajektorie des Apfels repräsentiert?

$$x_1' = x_2$$
$$x_2' = -g - \frac{\lambda}{m} x_2$$

Von der Physik zur ODE



Wie sieht das dynamische System aus, welches die Trajektorie des Apfels repräsentiert?

$$X: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad X'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\lambda}{m} \end{bmatrix} X(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix}$$

Eine Differentialgleichung höherer Ordnung kann durch Einführung zusätzlicher Zustandsvariablen als System von Differentialgleichungen erster Ordnung geschrieben werden.

Unterschiedliche Systemarten



Autonom vs. Nichtautonom

Autonom: $x' = f(x)$
Nichtautonom: $x' = f(t, x)$

Linear vs. nichtlinear

Linear: $x' = Ax + Bu$
Nichtlinear $x' = x(1 - x)$

Deterministisch vs. stochastisch

Deterministisch: eindeutige Dynamik
Stochastisch: zusätzliche Zufallseinflüsse

Homogen vs. inhomogen

Homogen: $x'(t) = Ax(t)$
Inhomogen: $x'(t) = Ax(t) + b(t)$

Lösungsansatz: Trennung der Variablen (Leibniz)



$$\frac{dx}{dt} = g(t)h(x)$$

- Durch Trennung der Variablen bringen wir alle y-Terme auf eine und alle t- Terme auf die andere Seite

$$\frac{1}{h(x)}dx = g(t)dt$$

- Integriere die beiden Seiten

$$\int^{x} \frac{1}{h(x)}dx = \int^{t} g(t)dt$$

Lösungsansatz: Homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten



$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0$$

- Ansatz: $\mathrm{x}(t) = Ce^{\lambda t}$
- Ableitungen: $x'(t) = \lambda Ce^{\lambda t}$ und $x''(t) = \lambda^2 Ce^{\lambda t}$

- $\rightarrow \quad Ce^{\lambda t}(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0$ Charakteristische Gleichung

- Lösung: $\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Lösungsansatz: Homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten



$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0$$

- $x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \rightarrow 2\ L\ddot{o}sungen$
- $x = (C_1 t + C_2) e^{\lambda t} \rightarrow 1\ L\ddot{o}sung$
- $x = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t) \rightarrow komplex\ \ \lambda = \alpha \pm \beta i$

Lösungsansatz: Inhomogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten



$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = g(t)$$

- $x(t) = \mathrm{x_a(t)} + \mathrm{x_p(t)}$

- x_a allgemeine Lösung der homogenen DG.
- x_p partikuläre Lösung der inhomogenen DG.

Picard–Lindelöf: Existenz und Eindeutigkeit



Frage: Führt ein Anfangszustand zu genau einer Trajektorie?

Anfangswertproblem: $X'(t) = g(t, X(t)), \quad X(0) = X_0$

Voraussetzungen

- g ist stetig in der Zeit t.
- g ist Lipschitz-stetig im Zustand X (mit einheitlicher Konstante L).

Konsequenz

- Eine eindeutige Lösung existiert.
- Global bei globaler Lipschitz-Bedingung; lokal bei lokaler.

$$\exists L_D > 0, \forall x, y \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \qquad \|g(x) - g(y)\| \leq L_D \|x - y\|$$

Global if $D = \mathbb{R}^n$

Stabilität dynamischer Systeme



Autonomes System: $X'(t) = g(X(t))$ mit $X(0) = X_0$

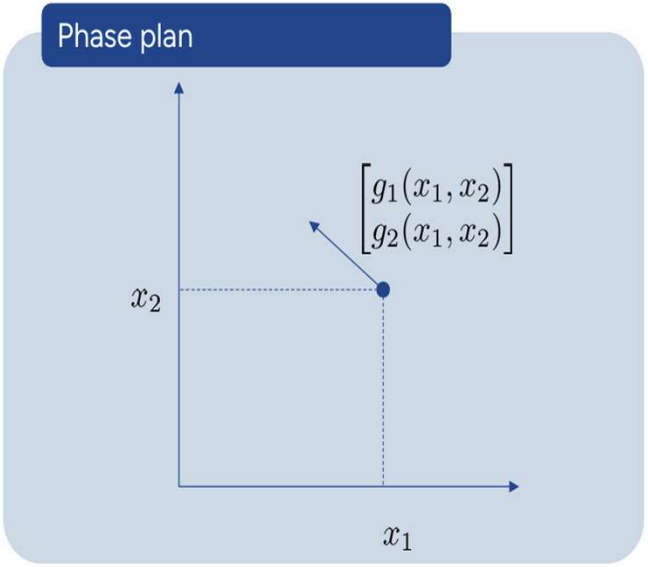
Gleichgewichtspunkt	$g(X_{eq}) = 0 \rightarrow$ Der Zustand bleibt unverändert: $X(t) = X_{eq}$.
Lokal asymptotisch stabil	Trajektorien aus einer Umgebung konvergieren zum Gleichgewicht.
Global asymptotisch stabil	Alle zulässigen Anfangszustände konvergieren zum Gleichgewicht.

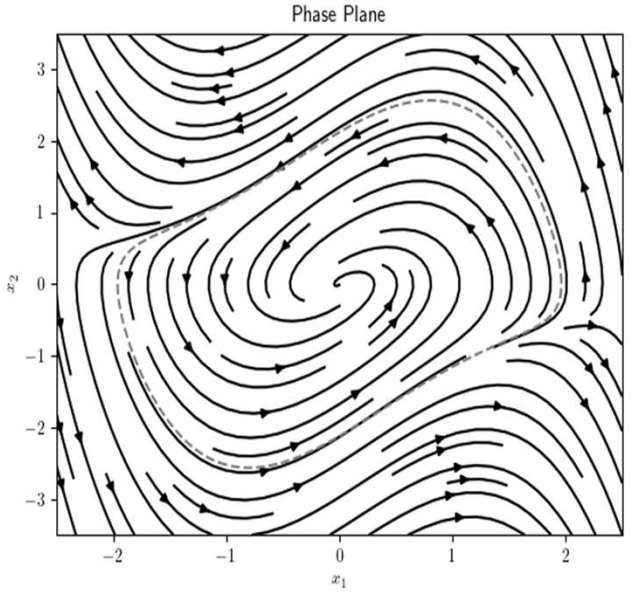
Phasenportrait: Stabilität im Zustandsraum

$$X'(t) = g\big(X(t)\big)\, mit \;\; X = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$$

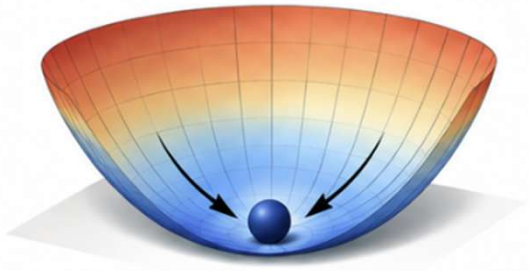
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = g_1(x_1(t), x_2(t)), \\ \dot{x}_2(t) = g_2(x_1(t), x_2(t)), \\ x_1(0) = x_1^0,\ x_2(0) = x_2^0 \end{cases}$$

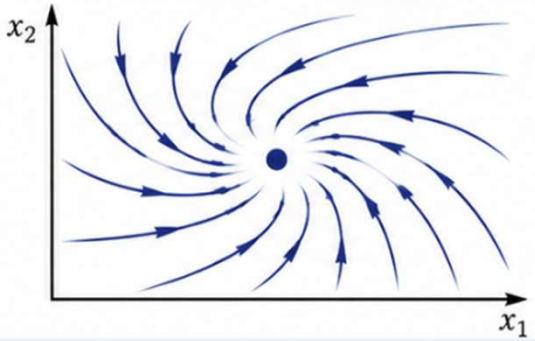
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - \mu(1 - x_1(t)^2)x_2(t). \end{cases}$$





Stabiles Gleichgewicht
(lokal asymptotisch stabil)

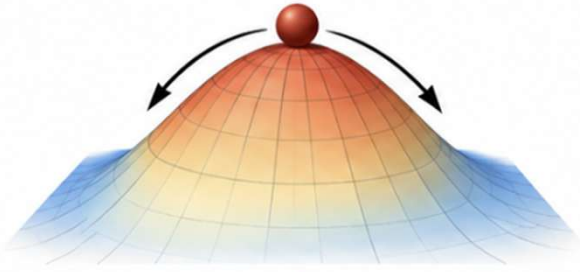


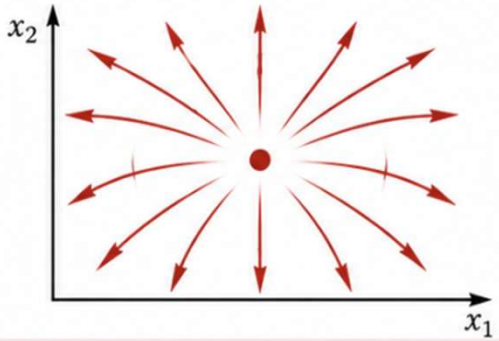


$$g(X_{eq}) = 0$$

- Trajektorien konvergieren zum Gleichgewichtspunkt.
- Die Annäherung kann geradlinig sein (stabiler Knoten) oder spiralförmig (stabiler Fokus).
- Das Gleichgewicht ist lokal asymptotisch stabil.

Instabiles Gleichgewicht
(nicht stabil)

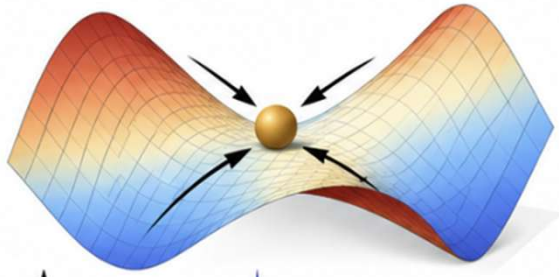


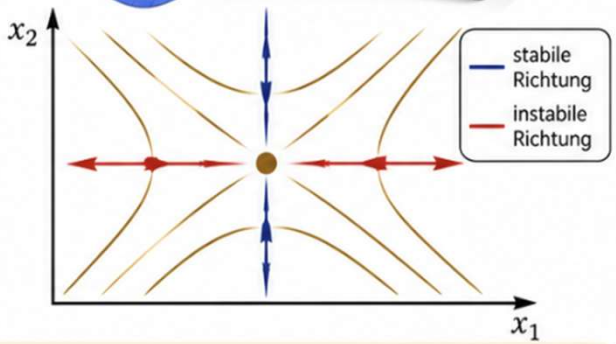


$$g(X_{eq}) = 0$$

- Eine beliebig kleine Störung führt dazu, dass sich die Trajektorie vom Gleichgewichtspunkt entfernt.
- Das Gleichgewicht ist nicht stabil (instabil).

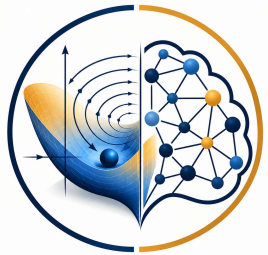
Sattelpunkt
(instabil)



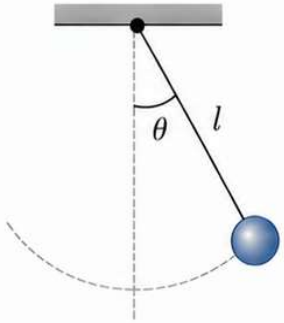


$$g(X_{eq}) = 0$$

- In einigen Richtungen konvergieren Trajektorien zum Gleichgewicht, in anderen entfernen sie sich davon.
- Der Sattelpunkt ist daher instabil.
- Die blauen Bahnen bilden die stabile Mannigfaltigkeit, die roten Bahnen die instabile Mannigfaltigkeit.



Ungedämpftes Pendel (Vakuum, keine Reibung)



Bewegungsgleichung

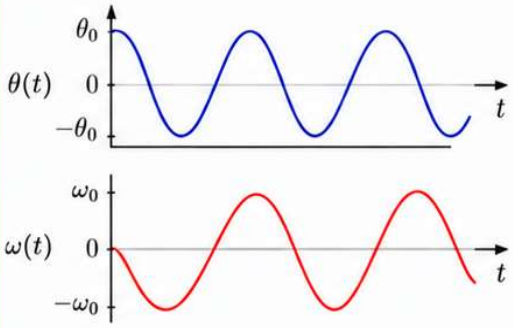
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$

Für kleine Auslenkungen (lineare Näherung):

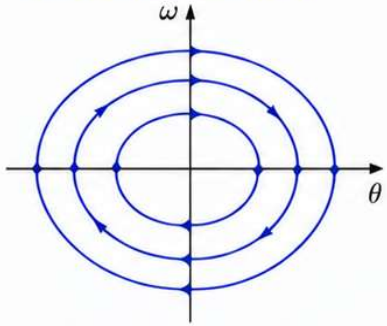
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

- keine Dämpfung
- keine Energieverluste
- ideale Schwingung mit konstanter Amplitude

Zeitverlauf (kleine Auslenkung)



Phasenportrait (θ, ω)

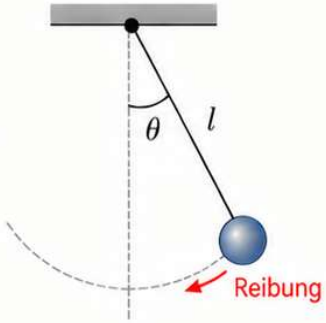


Eigenschaften

- Gleichgewichtspunkt: $(\theta, \omega) = (0, 0)$
- Trajektorien sind geschlossene Bahnen um den Gleichgewichtspunkt (Ellipsen in der linearen Näherung).
- Kleine Störungen bleiben klein (stabil).
- Das System kehrt nicht zum Gleichgewicht zurück, sondern schwingt mit konstanter Amplitude weiter.

⇒ **stabil, aber nicht asymptotisch stabil.**

(Unterkritisch) Gedämpftes Pendel (mit Reibung)



Bewegungsgleichung

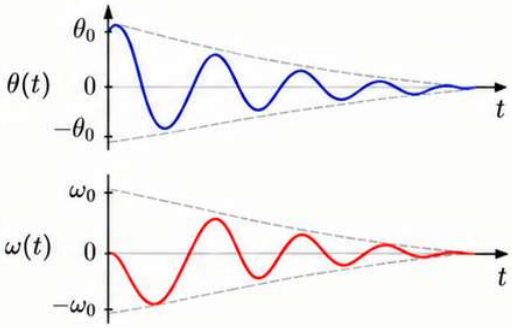
$$\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$

Für kleine Auslenkungen (lineare Näherung):

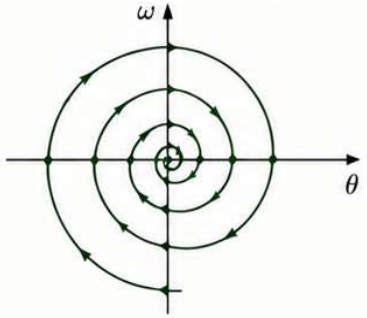
$$\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

- Dämpfung durch Reibung (z. B. Luftwiderstand, Lagereibung)
- Energie wird dissipiert
- Schwingungsamplitude nimmt mit der Zeit ab

Zeitverlauf (kleine Auslenkung)



Phasenportrait (θ, ω)



Eigenschaften

- Gleichgewichtspunkt: $(\theta, \omega) = (0, 0)$
- Trajektorien spiralisieren zum Gleichgewichtspunkt (für $0 < \beta < \sqrt{g/l}$, unterkritische Dämpfung).
- Kleine Störungen führen zu einer Rückkehr zum Gleichgewicht.
- Die Amplitude der Schwingung nimmt mit der Zeit ab.

⇒ **asymptotisch stabil** (für $\beta > 0$).

1.2 Numerische Approximation der Lösung einer ODE



- Warum brauchen wir numerische Löser?
- Nur wenige ODEs besitzen eine geschlossene analytische Lösung

Explizites Euler Verfahren



$$x(t)' = g(x(t))$$
$$x(0) = x_0 \rightarrow \text{autonomes dynamisches System}$$

$$+$$

$$x'(t) \cong \frac{x(t_n + h) - x(t_n)}{h}$$

Vorwärtsapproximation

$$=$$

$$x(t_n + h) \cong x(t_n) + hg(x(t_n))$$

Numerische Stabilität

Kleine Fehler in der Anfangsbedingung wachsen nicht unkontrolliert

Numerische Konsistenz

Das numerische Schema ist konsistent, wenn der numerische Operator gegen den realen Operator konvergiert für $h \rightarrow 0$

Numerische Konvergenz

Die numerische Lösung nähert sich der realen Lösung an für $h \rightarrow 0$

Lax equivalence Theorem

Stabilität + Konsistenz = Konvergenz

Wann konvergiert das Explizite Euler Verfahren?



1 Explizites Euler-Verfahren

Für das Anfangswertproblem

$$\dot{X}(t) = g(X(t)), \quad X(0) = X_0$$

lautet das explizite Euler-Verfahren

$$X_{k+1} = X_k + h\, g(X_k), \qquad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

- $h > 0$: Zeitschrittweite
- $X_k \approx X(t_k)$ mit $t_k = kh$

2 Stabilität des numerischen Verfahrens

Das Verfahren ist (linear) **stabil**, wenn die Eigenwerte von Λ_h einen Spektralradius kleiner als 1 haben:

$$\rho(\Lambda_h) < 1$$

Für den linearen Fall $g(X) = AX$ gilt

$$\Lambda_h = I + hA \quad \Rightarrow \quad \rho(I + hA) < 1$$

3 Beispiel: lineares System

Für $g(X) = AX$ ergibt sich

$$X_{k+1} = X_k + hAX_k = \underbrace{(I + hA)}_{\Lambda_h} X_k$$

Stabilitätsbedingung

Die Diskretisierung ist stabil, wenn

$$|1 + h\lambda_i| < 1$$

für alle Eigenwerte λ_i von A.

4 Konsistenz

Das Verfahren ist konsistent, da

$$\lim_{h \to 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{h} = g(X(t)) = \dot{X}(t).$$

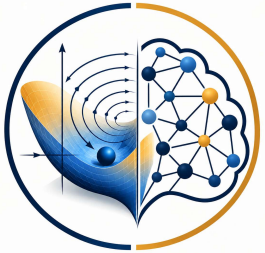
5 Konvergenz (Ordnung 1)

Für $g(X) = AX$ gilt

- Die numerische Lösung X_k nähert sich der exakten Lösung $X(t_k)$, wenn die Schrittweite h kleiner wird.
- Der globale Fehler ist proportional zur Schrittweite:

$$e_k = X(t_k) - X_k = \mathcal{O}(h).$$

Beispiel: Stabilität des Expliziten Euler-Verfahrens



1 Lineares Testproblem

Betrachte die lineare DGL

$$\dot{x}(t) = -2x(t), \quad x(0) = 1.$$

Die exakte Lösung lautet

$$x(t) = e^{-2t}.$$

Das System ist stabil und konvergiert gegen das Gleichgewicht $x = 0$.

2 Explizites Euler-Verfahren

Das explizite Euler-Verfahren ergibt

$$x_{k+1} = x_k + h(-2x_k)$$

$$x_{k+1} = (1 - 2h)x_k.$$

Der Faktor $1 - 2h$ entscheidet, ob die numerische Lösung abklingt oder anwächst.

3 Stabilitätsbedingung

Das Verfahren ist stabil, wenn

$$|1 + h\lambda| < 1.$$

Für $\lambda = -2$ folgt

$$\begin{aligned} & |1 - 2h| < 1 \\ \Leftrightarrow \quad & -1 < 1 - 2h < 1 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 < h < 1. \end{aligned}$$

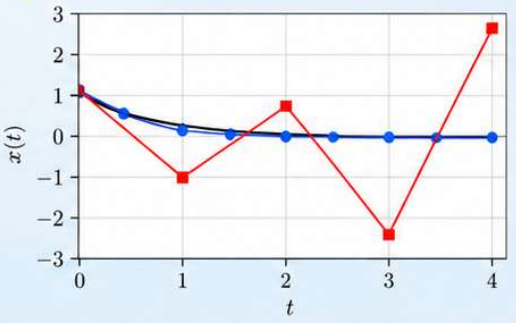
Das explizite Euler-Verfahren ist für dieses Beispiel nur bei Zeitschrittweiten $0 < h < 1$ asymptotisch stabil.

4 Numerische Beispiele

Vergleich zweier Zeitschrittweiten mit $x_0 = 1$:

k	Euler ($h = 0{,}25$) $(1 - 2h = 0{,}5)$	Euler ($h = 1{,}2$) $(1 - 2h = -1{,}4)$	Exakt $x(t_k) = e^{-2t_k}$
0	1	1	1
1	0,5	−1,4	0,1353
2	0,25	1,96	0,0183
3	0,125	−2,744	0,0025
4	0,0625	3,8416	0,00034
Verhalten	konvergiert gegen 0	schwingt mit wachsendem Betrag	konvergiert gegen 0

5 Vergleich der Trajektorien



- Für $h = 0{,}25$ $(|1 - 2h| = 0{,}5 < 1)$ konvergiert die numerische Lösung gegen 0.
- Für $h = 1{,}2$ $(|1 - 2h| = 1{,}4 > 1)$ schwingt die numerische Lösung mit wachsendem Betrag und divergiert.

Fazit

Obwohl **das physikalische System stabil** ist, kann die **numerische Simulation** mit dem expliziten Euler-Verfahren bei einer zu großen Zeitschrittweite **instabil werden**. Die Schrittweite beeinflusst somit nicht nur die Genauigkeit, sondern auch die Stabilität der Simulation.

Lokaler und globaler Diskretisierungsfehler

$$X_{k+1} = X_k + h\Phi(t_k, X_k, h, g)$$



Lokaler Fehler

Maximaler Fehler eines einzelnen Schritts,

ausgehend vom exakten Zustand.

$$\begin{aligned}\epsilon_k(h) &= X(t_{k+1}) - X_{k+1} \\ &= X(t_{k+1}) - X(t_k) - h\Phi(t_k, X(t_k), h, g)\end{aligned}$$

$$\lim_{h\to 0} \|\epsilon_k(h)\| = 0.$$

Globaler Fehler

Aufsummierte Wirkung der Fehler

nach vielen Zeitschritten.

$$e(kh, h) = X(t_k) - X_k$$

$$\lim_{h\to 0} \sup_k \|e(t, h)\| = 0.$$

Warum ist Euler ein Verfahren erster Ordnung?

$$\epsilon_k(h) = X(t_k) + h\dot{X}(t_k) + \frac{1}{2}h^2\ddot{X}(t_k) + o(h^2) - X(t_k) - h\dot{X}(t_k) = \frac{1}{2}h^2\ddot{X}(t_k) + o(h^2).$$

Lokaler Fehler: $\epsilon_k(h) = O(h^2)$ → Globaler Fehler: $e(kh, h) = O(h)$ → Ordnung 1

Implizites Euler Verfahren



$$x(t)' = g(x(t))$$
$$x(0) = x_0 \rightarrow \text{autonomes dynamisches System}$$

$$+$$

$$x'(t+h) \cong \frac{x(t_n + h) - x(t_n)}{h}$$

Vorwärtsapproximation

$$=$$

$$x(t_n + h) \cong x(t_n) + hf(x(t_n + h))$$

Numerische Stabilität

Die implizite Euler-Methode ist bedingungslos stabil und somit konvergent (Ordnung 1).

Numerische Approximation der Lösung (RK2)



$$X(t_{n+1}) = X(t_n) + \int_{t_n}^{t_n+h} g(X(t))\,\mathrm{d}t \overset{v \leftarrow \frac{t-t_n}{h}}{=} X(t_n) + h\int_0^1 g(X(t_n+hv))\,\mathrm{d}v$$

$$+$$

Das Integral mit der Trapezregel approximieren

$$\int_0^1 g(X(t_n+hv))\,\mathrm{d}v \simeq \frac{1}{2}\left(g(X(t_n)) + g(X(t_n+h))\right)$$

$$+$$

$$X(t_n+h) \simeq X(t_n) + hg(X(t_n))$$

$$=$$

$$X(t_{n+1}) = X(t_n) + \frac{h}{2}\left[g(X(t_n)) + g\left(X(t_n) + hg(X(t_n))\right)\right]$$

Numerische Approximation der Lösung (RK4)



$$X(t_{n+1}) = X(t_n) + \int_{t_n}^{t_n+h} g(X(t))\,\mathrm{d}t \overset{v \leftarrow \frac{t-t_n}{h}}{=} X(t_n) + h\int_0^1 g(X(t_n+hv))\,\mathrm{d}v$$

+

Das Integral mit der Simpson-Regel approximieren

$$\int_0^1 g(X(t_n+hv))\,\mathrm{d}v \simeq \frac{1}{6}\left[g(X(t_n)) + 4g(X(t_n+h/2)) + g(X(t_n+h))\right]$$

+

Euler Explizit Euler Implizit

$$4g(X(t_n+h/2)) = 2g(X(t_n+h/2)) + 2g(X(t_n+h/2))$$

=

$$X(t_{n+1}) = X(t_n) + \frac{h}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right]$$

Midpoint Methode

$$X(t_{n+1}) \simeq X(t_n) + hg(X(t_n+h/2))$$

$$k_1 = g(X(t_n)), k_2 = g(X(t_n) + \frac{h}{2}k_1),$$
$$k_3 = g(X(t_n) + \frac{h}{2}k_2), k_4 = g(X(t_n) + hk_3)$$

Allgemeines Runge–Kutta-Verfahren und Butcher-Tableau



Für eine Differentialgleichung $X'(t) = g(t, X(t))$ mit Schrittweite h

Allgemeines s-stufiges RK-Verfahren

$$k_i = g(t_n + c_i h, X(t_n) + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j)$$

$$X(t_{n+1}) = X(t_n) + h \sum_{i=1}^{s} b_i k_i$$

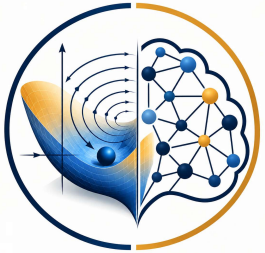
k_i : Steigungen an Zwischenpunkten
a_{ij} : Berechnung der Zwischenzustände
b_i : Gewichte der Steigungen
c_i : Zeitpunkte innerhalb des Schritts

Butcher-Tableau

c_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1s}
c_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2s}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
c_s	a_{s1}	a_{s2}	$\cdots$	a_{ss}
	b_1	b_2	$\cdots$	b_s

Konsistenz (1. Ordnung): $\Sigma\, b_i = 1$

Stabilität, Konsistenz und Konvergenz von Runge-Kutta-Verfahren



Numerische Stabilität

Ein Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung p ist stabil, wenn für jeden Eigenwert λ der Matrix A die folgende Bedingung gilt:

$$\left|1 + h\lambda + \frac{(\lambda h)^2}{2} + \cdots + \frac{(\lambda h)^p}{p!}\right| < 1$$

Numerische Konsistenz

Ein Runge-Kutta-Verfahren mit Zuwachsform

$$X_{n+1} - X_n = \sum_{i=1}^{s} b_i k_i$$

ist konsistent, wenn die Gewichte die Bedingung

$$\sum_{i=1}^{s} b_i = 1$$

Numerische Konvergenz

Ein Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung p, das stabil und konsistent ist, konvergiert.

Ist die Methode von Ordnung p und die Gewichte b_i sind symmetrisch, so gilt für den globalen Fehler

$$\|x(t_n) - X_n\| \leq C\, h^p$$

für ein konstantes $C > 0$ und hinreichend kleine Schrittweite h.