

3 Von der Erde zur Karte

3.1 Verzerrungen

Die Konstruktion eines Kartennetzentwurfs bedeutet nun die Definition einer Abbildung der Erdkugel in eine ebene (Bild-)Fläche mit gleichzeitiger Abbildung eines Netzes von Koordinatenlinien, die auf der Kugel gegeben sind.

Aus Sicht des Anwenders einer Karte sind folgende Eigenschaften wünschenswert:

Definition 3.1 (Winkeltreue) *Der Winkel zwischen zwei sich schneidenden Linien (definiert durch den Winkel zwischen den Tangenten an diesen Linien in deren Schnittpunkt) bleibt bei der Abbildung erhalten. Dies wird auch **Konformität** der Abbildung genannt.*

Definition 3.2 (Längentreue, Abstandstreue) *Der Abstand zweier Punkte bleibt bei der Abbildung bis auf einen festen, für alle abgebildeten Gebiete der Kugel gültigen (globalen) Maßstabsfaktor m erhalten.*

Definition 3.3 (Flächentreue) *Einander zugeordnete (differentielle) Flächenelemente in Original und Bild sind in jedem Punkt flächengleich.*¹⁶

Diese intuitiven Begriffe müssen mit Mitteln der Differentialgeometrie präzisiert werden. Eine mathematisch exakte Definition der Begriffe Längen-, Winkel und Flächenverzerrung mit Mitteln der Differentialgeometrie kann in entsprechenden Lehrbüchern nachgelesen werden.

Verzerrungen treten auf, wenn einer der oben genannten Treueforderungen verletzt wird. Abbildungen, die keine Verzerrungen hinsichtlich der Strecken, Winkel und Flächen aufweisen, werden **verzerrungsfrei** genannt. Im folgenden wird zunächst unterstellt, daß die Erde Kugelgestalt besitzt. Wie **Leonhard Euler** (1707-1783) gezeigt hat¹⁷, ist es unmöglich, eine Kugel verzerrungsfrei in eine Ebene abzubilden. Insbesondere existiert keine Abbildung der Kugel in eine Ebene, die **abstandstreu** ist. Das schließt nicht aus, daß spezielle Linien in wahrer Länge abgebildet werden, bei vielen Abbildungen besteht zudem noch die Möglichkeit, diese Linien gezielt auszuwählen. Aus den Überlegungen der Differentialgeometrie folgt weiter, daß sich Winkeltreue und Flächentreue ausschließen.

Das Auftreten von Verzerrungen ist typisch für Abbildungen einer Fläche auf eine andere. Folgende **verzerrungsfreie Abbildungen** sollen besonders erwähnt werden:

- Abbildung eines Kegels in eine Ebene
- Abbildung eines Zylinders in eine Ebene

¹⁶Abbildungen mit der Eigenschaft der **Flächentreue** werden in der Geographie gern benutzt, da häufig die Bedeutung eines Merkmals mit seiner flächenhaften Ausdehnung einhergeht. Sie sind deshalb auch ein wichtiges Gestaltungsmittel für Ausgaben in GIS-Systemen.

¹⁷Der Eulersche Beweis beruht auf folgender Überlegung: Während die Summe der Innenwinkel im ebenen Dreieck stets den konstanten Wert 180 (Alt-)Grad hat, ist dieser Wert beim sphärischen Dreieck nicht konstant und um den sphärischen Exzeß größer als dieser Wert. Gäbe es eine verzerrungsfreie Abbildung der Kugel auf eine Ebene, so müßte diese ein sphärisches Dreieck in ein ebenes Dreieck unter Erhalt der Seitenlängen und Innenwinkel abbilden. (Die Seiten stellen jeweils die kürzeste Verbindung der Eckpunkte dar.) Das ist jedoch ein Widerspruch.

Diese Abbildungen entstehen durch Aufschneiden des Kegels / Zylinders entlang einer Mantellinie und Abwickeln der entstehenden Fläche.¹⁸ Die Flächen Kegel und Zylinder dienen beim Entwurf einiger Kartennetze als Hilfsfläche, auf die die Kugel abgebildet wird und die dann abgewickelt wird.

Da die Kugel einen Spezialfall eines Rotationsellipsoid darstellt, kann es auch keine verzerrungsfreie Abbildung dieser Fläche in die Ebene geben.

3.2 Klassifizierung der Abbildungen der Kugelfläche in die Ebene

Vorgelegt sei eine Kugel mit einem azimutalen Koordinatensystem, dessen Ursprung in einem beliebigen Punkt der Kugeloberfläche liegt, und den Koordinaten (d, a) . Dabei bezeichne d die Distanz vom Ursprung und a das Azimut.¹⁹

Die Klassifikation von Abbildungen der Kugel in eine Ebene kann nach mehreren Kriterien vorgenommen werden:

3.2.1 Winkeltreue, flächentreue und abweitungstreue Abbildungen

Wie stellt man sich diese Eigenschaften vor? Zunächst werden (b, l) als die Koordinaten der Ausgangsfläche und (x, y) als Koordinaten der Bildfläche definiert. Dann gilt :

$$(1) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(b, l) \\ y(b, l) \end{pmatrix}$$

Abb. (1) wird dann einer Reihenentwicklung unterzogen (Taylor-Reihe), dafür muss (1) differenzierbar sein.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_b(b, l)|_{b=b_0, l=l_0} (b - l_0) + x_l(l - l_0) \\ y_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1(x_0, y_0, x_1 - x_0, y_1 - y_0) \\ R_2(x_0, y_0, x_1 - x_0, y_1 - y_0) \end{pmatrix}$$

dabei wurden die Argumente (b, l) der partiellen Ableitungen x_b, x_l, y_b, y_l unterdrückt. Außerdem wurde der Entwicklungspunkt $b = b_0, l = l_0$ nur einmal angegeben.

$$A = \begin{pmatrix} x_b(b, l)|_{b=b_0, l=l_0} x_l \\ y_b \end{pmatrix}; \quad R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} (b - b_0) \\ (l - l_0) \end{pmatrix} + R$$

dabei gilt : $\|R\| = O(\sqrt{(b - l_0)^2 + (l - l_0)^2})$ R ist das Restglied.

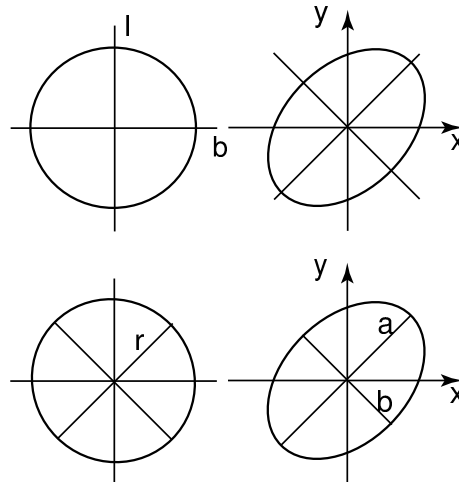
Abb. (1) wird im wesentlichen durch den Linearteil A des Funktionszuwachses bestimmt.

¹⁸Streng genommen sind diese Abbildungen nicht vollständig verzerrungsfrei. Eine Störung entsteht an der genannten Mantellinie, wo der Kegel/Zylinder „aufgeschnitten“ wird.

¹⁹Das Gradnetz der Erde mit dem Norpol als Ursprung ist beispielsweise ein solches System.

Diese Matrix beschreibt eine affine Abbildung in der Ebene. Dabei gilt:

- 1) Das affine Bild des Kreises ist eine Ellipse.
- 2) Es existieren zwei Durchmesser des Urbildkreises, die in die zwei orthogonalen Halbachsen der Ellipse übergehen.



Diese Kreisdurchmesser bestimmen die (liegen auf den) Hauptverzerrungsrichtungen der Abbildung.

Das Bild eines Einheitskreises unter dem Linearteil der Kartenabbildung wird in der Kartographie als *Indikatrix von Tissot* bezeichnet.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{r}{a} = \frac{1}{\lambda_1} \\ \frac{r}{b} = \frac{1}{\lambda_2} \end{array} \right\} \text{Hauptverzerrung der Abbildung}$$

Flächeninhalt:

$$\begin{array}{ll} \text{Kreis} & F_K = r^2\pi \\ \text{Ellipse:} & F_E = ab\pi = r^2\lambda_1\lambda_2\pi \end{array}$$

Sätze von Tissot:

Eine Abbildung ist flächentreu, wenn

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$$

und winkeltreu, wenn

$$\lambda_1 = \lambda_2.$$

Zur Klassifikation Abbildungsart dienen die Eigenschaften der *Indikatrix von Tissot*. Seien k_1 und k_2 die große bzw. kleine Halbachse der Indikatrix. Dann gilt für

- a) konforme kartographische Entwürfe: $k_1 = k_2$.
- b) flächentreue kartographische Entwürfe: $k_1 \cdot k_2 = 1$.

Abweitungstreue kartographische Entwürfe: gewisse Koordinatenlinien $d = \text{const}$ oder $a = \text{const}$ des azimutalen Koordinatensystems werden ohne Verzerrung abgebildet.

3.2.2 Echte und unechte Abbildungen

Definition 3.4 (echte Abbildung) Eine Abbildung der Kugel in eine Ebene heißt **echte Abbildung**, wenn dabei alle Hauptkreise $a = \text{const}$ in Gradenbüschel und alle Horizontalkreise $d = \text{const}$ in dazu orthogonale konzentrische Kreise abgebildet werden (die Gerade gilt dabei als Kreis mit „unendlich großem“ Radius).

Definition 3.5 (unechte Abbildung) Eine Abbildung der Kugel in eine Ebene heißt **unechte Abbildung**, wenn sie keine echte Abbildung ist, d.h. die Orthogonalität der Koordinatenlinien verloren geht oder die Bildkurven zu anderen Kurventypen gehören.

Echte Abbildungen: Wie oben dargestellt, bildet eine echte Abbildung die Kugeloberfläche in die Ebene ab. Für das Verständnis ist es manchmal gut, sich eine geometrische Vorstellung von der Abbildung zu machen. So gibt es einmal Abbildungen direkt in die Ebene und zum anderen Abbildungen, die anschaulich scheinbar die Hilfsflächen Zylinder oder Kegel zum Bildraum haben. Diese werden anschließend verzerrungsfrei abgewickelt. Dementsprechend wird zwischen *azimutalen Abbildungen*, *Zylinderabbildungen* und *Kege-labbildungen* unterschieden. Für diese Abbildungsklassen ergeben sich folgende charakteristischen formelmäßigen Zusammenhänge zwischen den azimutalen Koordinaten auf der Kugel und einem geeigneten Koordinatensystem in der Bildebene bzw. folgende charakteristische Bilder der abgebildeten Koordinatennetze:

	Koordinatensystem im Bildraum	Transformation	Bild des Netzes
Azimutale Abbildung	Polarkoordinaten (r, e)	$r = r(d)$ $e = e(a)$	Kreise $a = \text{const}$ als Schar konzentrischer Kreise abgebildet
Zylinderabbildung	Kartesische Koordinaten (x, y)	$x = x(d)$ $y = y(a)$	Netzlinsen bilden zwei orthogonale Scharen von Geraden
Kege-labbildung	Polarkoordinaten (r, e)	$r = r(d)$ $e = e(a)$	Netzlinsen bilden ebenes Polarkoordinatensystem überdecken die Fläche eines konzentrischen Kreissektors

Man entnimmt der Form der Abbildungsgleichungen, daß das orthogonale Koordinatennetz des azimutalen Systems in ein orthogonales Netz in der Bildebene abgebildet wird.

Folgende Tabelle zeigt einige kartographische Entwürfe hinsichtlich ihrer Gestalt und Eigenschaften:

Typ	abweitungstreu	flächentreu	winkeltreu
Azimutale Abbildung	Mittabstandstreuer azimutaler Entwurf	Lambert: Flächentreuer azimutaler Entwurf	Stereographische Projektion
Kege-labbildung	de l'Isle	Albers: Flächentreuer Kegelentwurf, Lambert: Flächentreuer Kegelentwurf, Lambert: Flächentreuer Kegelstumpfentwurf	Weltluftkarte
Zylinder-abbildung	Quadratische Plattkarte, Rechteckige Plattkarte, Cassini-Soldner-Entwurf	Lambert: Zylinderentwurf, Entwurf mit 2 längentreuen Parallelkreisen	Gauß-Krüger-Entwurf, Mercatorabbildung

Das Verhältnis des zur Projektion gehörigen azimutalen Koordinatensystems (r, d) zum geographischen Koordinatensystem liefert zusammen mit der geographischen Länge l und der geographischen Breite b ein weiteres Klassifikationsmerkmal. Gegenüber dem allgemeinen Fall, der hier als **schiefachs**ig bezeichnet wird, werden zwei Lagen ausgezeichnet, **normal** und **transversal**. Zur Beschreibung wird der Begriff des *Hauptpunktes* der Abbildung benötigt:

Definition 3.6 (Hauptpunkt)

Der Hauptpunkt einer Abbildung der Kugel ist ein ausgezeichneter Punkt dieser Abbildung.

1. Der Hauptpunkt einer azimutalen Abbildung ist der Berührungspunkt von Kugel und Bildebene.
2. Der Hauptpunkt einer Kegelabbildung ist derjenige Schnittpunkt von Kegelachse und Kugel, der der Kegelspitze am nächsten ist.
3. Der Hauptpunkt einer Zylinderabbildung ist einer der Schnittpunkte der Zylinderachse mit der Kugel. Er kann aus den beiden Schnittpunkten ausgewählt werden.

Definition 3.7 Eine Abbildung ist in ...

- ... **normaler Lage**, wenn der Hauptpunkt ein Pol des geographischen Koordinatensystems ist.
- ... **transversaler (querachsiger) Lage**, wenn ein Punkt auf dem Äquator Hauptpunkt ist.
- ... **schiefachsiger (obliquer) Lage**, wenn der Hauptpunkt allgemeine Lage besitzt, also nicht im Pol oder auf dem Äquator ist.

Im allgemeinen kann jede Projektion in jeder Lage des Hauptpunktes ausgeführt werden. Einige Abbildungen werden jedoch bevorzugt mit einer Lage kombiniert und haben dort ggf. auch spezielle Namen:

	Normale Abbildung	Transversale Abbildung	Schiefachsige Abbildung
Azimutale Abbildung	Stereographische Projektion	Mittabstandstreuer azimutaler Entwurf	Mittabstandstreuer azimutaler Entwurf
Kegelabbildung	alle Kegelabbildungen	keine praktische Bedeutung	keine praktische Bedeutung
Zylinderabbildung	Mercatorabbildung	Gaußsche Abbildung, Gauß-Krüger-Entwurf	

Es ist anschaulich klar, daß sich die Kugel­fläche in der Umgebung jener Bereiche mit geringen Verzerrungen auf die Bildfläche transformieren läßt. Dies ist genau dort der Fall, wo die Bildfläche die Kugel/ das Ellipsoid berührt bzw. schneidet. Damit bieten sich zur Darstellung kreisförmiger Gebiete azimutale Abbildungen an, während für streifenförmige Gebiete längs eines Großkreises bzw. Kleinkreises die Zylinder- bzw. Kegelabbildungen die optimale Wahl darstellen.

Unechte Abbildungen: Zwischen dem azimutalen Koordinatensystem auf der Kugel (d, a) und seinem Bild (r, e) besteht der allgemeine Zusammenhang

$$r = r(d, a) \quad e = e(d, a) .$$

In der Praxis werden sie meist in normaler Lage verwendet, d.h. die Linien $d = \text{const}$ entsprechen den geographischen Breitenkreisen $b = \text{const}$ und $a = \text{const}$ den Meridianen $l = \text{const}$. Die Bilder der Breitenkreise sind meist nichtkonzentrische Kreise (mit dem Grenzfall „Gerade“), die der Meridiane sind gekrümmte Linien. Häufig lassen sich Symmetriebeziehungen feststellen.

Die unechten Abbildungen werden vielfach nicht durch eine Projektion erzeugt, deshalb wird in solchen Fällen zur klaren Begriffsbildung das Wort *Entwurf* benutzt. Ebenso ist deshalb hier eine Klassifikation nach Zylinder- und Kegelentwürfen nicht immer passend.

In neuerer Zeit wurde eine große Zahl *vermittelnder Entwürfe* bekannt. Bei vielen dieser

Entwürfe steht die Forderung nach Flächentreue im Vordergrund. Bei ihnen wurde die strenge Forderung der Flächentreue zu Gunsten einer verbesserten Winkeltreue und damit Ähnlichkeit im Kleinen aufgegeben. Nahezu alle diese Entwürfe wurden geschaffen, um eine spezielle Aufgabenstellung zu erfüllen, nur wenige erreichten allgemeine Bedeutung. Typisch für diese vermittelten Entwürfe ist die zweifache Symmetrie mit dem Äquator und einem Hauptmeridian als Symmetrieachsen. Die Pole werden auf Polinien abgebildet. Trotz der damit erzeugten starken Verzerrung der Polargebiete hinterlassen diese Entwürfe beim Betrachter einen „brauchbaren Eindruck“. Folgende Tabelle zeigt einige Beispiele:

Name	Typ	flächentreu ?
Stab-Werner-Entwurf	Kegelentwurf	ja
Bonnesche Projektion	Kegelentwurf	ja
Preußische Polyederprojektion	Kegelentwurf	
Entwurf von Apianus	Zylinderentwurf	
Entwürfe von Eckert (1-6)	Zylinderentwurf	nur 2, 4, 6
Mercator-Sanson-Entwurf	Zylinderentwurf	ja
Entwurf von Mollweide	Zylinderentwurf	ja
Hammer's flächentreue Planisphäre		ja
Winkel'scher Entwurf		
Entwurf von Nicolosi		

3.3 Testfragen

- Was ist ein Kartennetzentwurf?
- Erklären Sie die Begriffe winkeltreu, flächentreu, längentreu
- Was sind Azimutale, Zylinder- und Kegelprojektionen ?
- Warum sprechen wir von Entwürfen ?
- Klassifikation mit der Indikatrix von Tissot.